李天岩教授的治学之路

丁玖

美国南密西西比大学数学系

李天岩，祖籍湖南， 1945 年 6 月出生于福建省沙县。他的父亲李鼎勋早年留学日本东京帝国大学医学院，获医学博士。 1934 年回国任教湖南湘雅医学院， 1939 年起任福建省省立医院院长。李天岩三岁时随父母及全家定居台湾，在那里接受教育直至大学毕业。他 1968 年为台湾新竹清华大学数学系 68 级第一届毕业生。在按规定服役军队一年后，他于 1969 年赴美国马里兰大学 (University of Maryland) 数学系攻读， 1974 年获博士学位，其论文指导老师为詹姆士 · 约克 (James A. Yorke) 。

李天岩 1974 年至 1976 年在美国犹它大学 (University of Utah) 数学系任讲师， 1976 年至今在美国密执安州立大学 (Michigan State University) 数学系任教，其中 1976 年至 1979 年为助理教授， 1979 年至 1983 年为副教授， 1983 年至今为教授。他在 1998 年被任命为密执安州立大学讲座教授 (University Distinguished Professor) 。李天岩 1978 年至 1979 年应邀至美国威斯康星大学 (University of Wisconsin) 数学研究中心担任客座副教授，1987 年至 1988 年为日本京都大学 (Kyoto University) 数理解析研究所访问教授， 1998 年秋季任位於美国加州大学柏克莱校区 (University of California at Berkeley) 的美国国家数学研究所 (Mathematical Sciences Research Institute) 访问教授， 2000 年秋季为中国香港城市大学 (City University of Hong Kong) 数学系访问教授。他分别于 1987 年和 1991 年成为中国吉林大学和北京清华大学的客座教授，并于 1997 年夏在北京清华大学高等理论科学研究中心任高级研究员。 2006 年台湾清华大学授予他特约讲座。

李天岩以一身病体在应用数学与计算数学几个重要领域中作出了开创性工作，成就非凡。他与约克的论文 “周期三则乱七八糟” (Period Three Implies Chaos) 在数学中第一次引人了 “混沌” 的概念；他对乌伦 (Stanislaw Ulam) 猜想的证明是动力系统不变测度计算研究之奠基性工作；他与凯洛格 (R. B. Kellogg) 及约克关于计算布劳尔 (L. E. J. Brouwer) 不动点的思想和数值方法，开辟了现代同伦延拓算法研究的新天地；他和他的合作者们以及学生们关于代数特征值问题以及一般多变量多项式系统同伦方法之广泛、深入研究，为他赢得此领域世界领袖人物之一之称号。

李天岩 1995 年获美国著名的哥根哈奖 (Guggenheim Fellowship) ， 1996 年获密执安州立大学杰出教授奖 (Distinguished Faculty Award) ， 1996 年获密执安州立大学弗莱明 (Frame) 杰出教学奖， 2002 年获台湾清华大学理学院杰出校友奖， 2006 年获密执安州立大学理学院杰出学术导师称号。

2005 年 5 月李天岩的母校台湾新竹清华大学主办了庆祝他六十岁生日的数值分析与动

力系统国际研讨会。约克教授用如下引人入胜的开场白开始了会议的第一个报告：“一百年前，爱因斯坦发表了划时代的四篇论文；而三十年前，李天岩完成了三个杰出的工作，它们分别是混沌概念，乌伦猜想，同伦算法。” 约克如此奇妙的比较，正是对李天岩原创性贡献的绝妙概括。

1 “周期三则乱七八糟”

现今世界上稍微了解一点动力系统的人，无人不知李天岩与约克于 1975 年在《美国数学月刊》 (*The Monthly* of Mathematics Association of America) 上发表了一篇极其重要的论文 “周期三则乱七八糟” 。该文首创了 “混沌” (Chaos) 的概念，开拓了整个科学界对混沌动力系统研究的新纪元。

在科学界，混沌现象的发现与相对论及量子力学被誉称为二十世纪三大发现之一。早在十九世纪末、二十世纪初，伟大的法国数学家庞加莱 (H. Poincaré) 在研究天体运动的 “三体问题” 时已知道其牛顿 (Newton) 运动微分方程组的解对初始条件的敏感性。二十世纪六十年代初，美国麻省理工学院 (Massachusetts Institute of Technology) 气象学教授爱德华 · 洛伦茨 (Edward N. Lorenz) 用三个简单的常微分方程来计算可用于天气预报的对流扩散问题时意外发现了长期天气预报的不可行性，即俗称的所谓 “蝴蝶效应” 。七十年代初美国普林斯顿大学 (Princeton University) 生物学教授罗伯特 · 梅 (Robert M. May) 在用 “逻辑斯缔模型” (Logistic Model) $S_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$ 来研究生物种类的数量变化时惊讶地发现当参数 α 接近 4 时，其迭代序列 $\{S_\alpha^n(x)\}$ 将变得愈加复杂。在这些科学研究的背景下，混沌的数学定义在李天岩与约克的著名论文中应运而生。

1972 年，洛伦茨关于气象预测模型的四篇论文引起了美国马里兰大学数学系和流体力学及应用数学研究所的约克教授和他的博士研究生李天岩的注意。 1973 年三月的一天下午，当李天岩来到约克的办公室时，约克对他说， “我有一个好想法告诉你” 。这个想法已在约克头脑中直观地凸现，但他未能予以证明。两周后，运用他得心应手的微积分技巧，李天岩完全地证明了这个后来出了名的李 - 约克定理：若实数轴 R 到其中的连续映射 f 有一个周期为三的点，即存在 a, 使得 $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$, 其中 $a \neq b \neq c$ ，则 (I) 对任意正整数 n, f 有一周期为 n 的点； (II) 存在 R 的一个不可数子集合 S, 使得对其中任何两点 $x \neq y$, 数列 $|f^n(x) - f^n(y)|$ 一定有一收敛于 0 的子数列，但整个数列一定不会收敛于 0 。此外对 f 的任一周期点 p 和 S 中任一点 x ，数列 $|f^n(p) - f^n(x)|$ 有一收敛于某一正数的子数列。当他们的文章写好后，按照约克的意图，寄给了具有大量读者的《美国数学月刊》。但不久文章被退回，理由是该文过于研究性，不适合此期刊所重点面向的大学生读者群。但编辑同意若作者能改写文章到一般学生都能看懂的地步，可以投回《数学月刊》。但是，由於李天岩忙于微分方程等方面的研究，这篇文章就在他桌上被束之高阁将近一年。

1973 - 1974 年是马里兰大学数学系生物数学的 “特殊年” 。在这一年里，每星期都要请 “生物数学” 这个领域里最杰出的学者来校演讲。在五月的第一个星期，他们请来了普林斯顿大学的梅教授演讲一周。在其最后一天的演讲中，他讲了逻辑斯蒂模型的迭代当参数从小到大变化时其动力性态愈来愈复杂的现象，但困惑于其解释，想像中也许只是计算上的误差所造成的吧。约克听完梅的演讲后，在送他上飞机时，把李天岩桌上躺了将近一年的那篇关

于李－约克定理的文章给他看。他看了文章的结果后，大为吃惊，并认定此定理大大解释了他的疑问。约克从机场回来后立即找到李天岩，"我们马上改写这篇文章。" 文章在两星期内改写完成，三个月后被《美国数学月刊》接受，并刊登在 1975 年 12 月份的那一期上。

"周期三则乱七八糟" 一文，第一次在数学上严格地引入了 "混沌" 的概念。尽管早在 1964 年，苏联数学家沙可夫斯基 (A. N. Sharkovsky) 证明了较李－约克定理第一部分更为一般的结果，但只有李－约克定理之第二部分才深刻地揭示了混沌的本质特征：混沌动力系统关于初始条件的敏感性以及由此产生的解的最终性态的不可预测性。根据统计，该文可能是数学界及物理学界被引述次数最多的当代重要论文之一。截止 2005 年，它已被引用了 900 多次。

2 乌伦猜想

遍历理论 (Ergodic Theory) 是关于非线性动力系统诸多统计性质研究的一门数学分支，是集测度论、泛函分析、拓扑学、近世代数等于一身的综合性学科，在物理，生物，和工程科学中应用广泛，如统计物理、药物设计、与无线通讯。遍历理论的一个重要论题是关于非线性映射的绝对连续不变测度的存在及计算问题。这一问题又归结为相应的定义在勒贝格 (Lebesgue) 可积函数空间 (即所谓的 L^1- 空间) 上的弗罗宾尼斯－佩农 (Frobenius-Perron) 算子 P 的不变密度函数的存在性与计算问题。对於混沌动力系统，这样的不变测度给出了混沌轨道在其相空间中的概率分布，并与像熵 (Entropy) 及李雅普诺夫指数 (Lyapunov Exponents) 这样的重要数学概念密切相关。

1960 年，被誉为美国氢弹之父的杰出波兰裔数学家乌伦在其名著《数学问题集》 (A Collection of Mathematical Problems) 中对於计算定义在单位区间 $[0,1]$ 上的非线性映射 $S:[0,1]\to[0,1]$ 所对应的弗罗宾尼斯－佩农算子的不变密度函数提出了一种数值方法。他将区间 $[0,1]$ 划分为 n 个子区间 $0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$ ，令 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ 为第 i 个子区间， $i=1,2,\ldots,n$ 。然后他定义了一个 $n\times n$ 阶的非负矩阵 $\overline{P}_n=[p_{ij}]$, 其 (i,j)-元素为 $p_{ij}=m(I_i\cap S^{-1}(I_j))/m(I_i)$, m 为勒贝格测度。 p_{ij} 量化了第 i 个子区间 I_i 中在映射 S 下被映射到第 j 个子区间 I_j 中那些点的比例。乌伦方法在于计算矩阵 $\overline{P}_n$ 关于特征值 1 的非负左特征向量 v_n 并将其规范化，使得以 v_n 的分量作为函数值的相应于如上划分的逐片常数函数 f_n 为一密度函数。此密度函数 f_n 可看成弗罗宾尼斯－佩农算子 P 的近似不变密度函数。对於这一基於概率想法的数值方法的收敛性，乌伦提出了他的著名猜想：若 P 有不变密度函数，则当 n 趋于无穷大时， f_n 将趋于 P 的一个不变密度函数 f^* 。

1973 年，波兰科学院院士洛速达 (Andrzej Lasota) 与约克在现已成为研究弗罗宾尼斯－佩农算子不变密度存在性问题的一篇经典性论文中解决了乌伦在其《数学问题集》中提出的一个问题：若 $S:[0,1]\to[0,1]$ 为一个足够 "简单" 的映射 (例如逐片线性映射或多项式映射)，其导数绝对值不小于 1 ，则对应的弗罗宾尼斯－佩农算子是否存在不变密度函数？事实上，洛速达和约克证明了如下的存在性定理：若 $S:[0,1]\to[0,1]$ 为一逐片二次连续可微映射，且其导数绝对值之下确界大於 1 ，则对应的弗罗宾尼斯－佩农算子存在不变密度函数，且每一个不变密度函数均为有界变差函数。这个定理证明的关键是用到约克发现的一个关于有界变差函数与其在某一子区间上的限制之变差之间关系的不等式。对於给定的映射 S ，由约克不等式可推得，存在一正常数 b ，使得对所有有界变差函数 f ，均有如下的洛速

达 – 约克不等式

$$\bigvee_0^1 Pf \le \frac{2}{\inf_{x\in[0,1]}|S'(x)|}\bigvee_0^1 f + b\int_0^1 |f(x)|dx.$$

当李天岩读到上述的洛速达 – 约克定理的证明时，敏锐地感觉到有界变差函数的概念以及关于有界变差函数序列的赫利 (E. Helly) 定理在证明乌伦方法收敛性时应起的作用，并坚信对於如上的洛速达 – 约克区间映射族，乌伦猜想应当成立。他马上开始了对乌伦数值方法的研究。首先他定义了对应于区间 $[0,1]$ 划分 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ 的有穷维离散算子 Q_n 。这个算子 Q_n 将每一可积函数 f 映成在每一子区间 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 上取值为 f 在 I_i 上的平均值的逐片常数函数。 Q_n 不光为将 L^1- 空间投影到逐片常数函数子空间上的迦辽金 (Galerkin) 投影算子，也是保持积分不变的马尔可夫 (Markov) 算子。若将 Q_n 与弗罗宾尼斯 – 佩农算子 P 复合成新的算子 $P_n = Q_nP$ ，则 P_n 限制在逐片常数函数全体所组成的子空间 Δ_n 上在其标准密度函数基底下的矩阵表示恰为乌伦方法中定义的那个随机矩阵 $\overline{P}_n$ 。运用下一节所述的布劳尔不动点定理，李天岩直接证明对每一个自然数 n, P_n 有一不变密度函数 f_n ，且借助于洛速达 – 约克不等式与赫利定理，对洛速达 – 约克区间映射族，他证明了乌伦猜想，且乌伦方法产生的近似不变密度序列 f_n 依 L^1- 范数强收敛于弗罗宾尼斯 – 佩农算子的一个不变密度函数 f^* 。

二十多年来，不变测度的计算已成为遍历理论和非线性分析中的一个活跃分支。 2003 年在澳大利亚悉尼召开的第五届国际工业与应用数学大会以及 2007 年将在瑞士苏黎士举行的第六届大会上都有与之密切相关的大会报告。在几乎所有关于应用乌伦方法及其推广计算不变测度的文献中，李天岩这篇发表于 1976 年美国《逼近论杂志》 (Journal of Approximation Theory) 的论文成了必不可少的被引用经典文章之一。此外，他的证明思想也启发了他的学生丁玖及其合作者 - 中国科学院数学与系统科学研究院周爱辉 - 在 1996 年证明对於高洛 – 波亚斯基 (P. Góra - A. Boyarsky) 高维映射族乌伦方法的收敛性。

3　现代同伦算法

学过代数拓扑或非线性泛函分析的人都知道有名的布劳尔不动点定理： n 维闭球 D^n 到此自身的光滑映射 $g : D^n \to D^n$ 必有不动点。此定理的一个漂亮证明是用反证法。若 g 无不动点，则对闭球 D^n 上任一点 x ，令 $f(x)$ 为由 $g(x)$ 到 x 的线段延长到与球面之交点。易知当 x 在球面上时， $f(x) = x$ 。这样我们得到一个由闭球到其边界 S^{n-1} 上且在 S^{n-1} 上为恒等映射的光滑映射。而拓扑学告诉我们，这是不可能的。

1973 年，当李天岩在旁听美国马里兰大学数学系凯洛格教授的研究生课程 “非线性方程组数值解” 时听到布劳尔不动点定理的属於美国拓扑学家赫希 (Morris W. Hirsh) 的发表于 1963 年的如上证明时，一个奇妙的想法在他脑海中涌现：既然在赫希的证明中若假设 g 无不动点时，则对如上定义的 f 及球面上的点 y, $f^{-1}(\{y\})$ 这条光滑曲线无处可跑，它必然会跑到 g 的不动点集合中去。更精确地说，若令 F 为光滑映射 $g : D^n \to D^n$ 的所有不动点组成的非空集合，则利用如上反证法的思想，我们可定义 n 维流形 $D^n\backslash F$ 到 $n-1$ 维球面 S^{n-1} 中的一个光滑映射 $f : D^n\backslash F \to S^{n-1}$ 。由微分拓扑的沙德 (A. Sard) 定理可知，对几乎所有的球面上的点 y, y 是 f 的正则值，因而 y 在 f 下的逆象 $f^{-1}(\{y\})$ 为起始于 y 的一维

流形，即一条光滑曲线。这条曲线的另一端不能再回到球面上去，也不能在 $D^n \backslash F$ 中停止，故必定趋向于 g 的不动点集。如果能数值逼近这条曲线，就能计算出 g 的一个不动点。在凯洛格和约克两位教授的鼓励下，李天岩开始了这一卓越思想的数值实现。

在接下来的三个月时间内，他几乎每天都与学校计算中心那台只能卡片输入的计算机打交道，但总是无功而返，计算机吐出的厚厚一迭纸预示着程序的失败。但李天岩契而不舍，坚持不懈地修改程序。改错、输入、再改错、再输入，从一个实际计算的门外汉逐步登堂入室。直到有一天，他惊喜地发现计算机仅仅输出一张打印纸，上面正是成功计算出的布劳尔不动点！他成功了！一个全新的布劳尔不动点算法诞生了。这同时也给出了现代同伦算法的肇始。

古典的同伦算法早在上世纪五十年代就有研究，尤其是苏联数学家戴维登科 (D. Davidenko) 引入相应的常微分方程初值问题来数值求解同伦方程。如果我们要计算一个非线性映射 $f : R^n \to R^n$ 的零点，我们可将一个零点 x_0 为已知的平凡映射 $f_0 : R^n \to R^n$（臂如说 $f_0(x) = x - x_0$) 与 f 同伦，即定义同伦映射 $H(x,t) = (1-t)f_0(x) + tf(x)$ ，其中参数 $0 \le t \le 1$ 。传统的同伦算法的思想是假设 H 的零点集 $H^{-1}(\{0\})$ 可表示成曲线 $(x(t),t) \subset R^n \times [0,1]$, $0 \le t \le 1$ ，此曲线连接 x_0 与 f 的一个零点 x^* 。若对恒等式 $H(x(t),t) \equiv 0$ 求关于 t 的导数，我们就得到可以数值求解的戴维登科常微分方程初值问题： $x'(t) = -H_x(x(t),t)^{-1}H_t(x(t),t),\ x(0) = x_0$. 由 $t = 0$ 起数值积分到 $t = 1$ 时，就可得到 f 的一个零点 x^* 。然而，这一方法的致命弱点在于，在一般情况下同伦曲线不一定总能定义 x 为 t 的单值函数。凯洛格 – 李 – 约克同伦方法的革命性思想是：只要能保证 0 是映射 $H(x,t)$ 的正则值，则由于沙德定理及隐函数定理，光滑同伦曲线必定存在。坐标变量 x 与参变量 t 应具有同等的地位，它们均可视为曲线长度 s 的函数。这样，无论曲线关于 t 是否 “转弯”, 运用 “预测 - 校正”(Predictor - Corrector) 的数值手段，我们均能追踪此同伦曲线而得到解。这是现代纯粹数学，尤其是微分拓扑，在计算数学领域中的重要应用。

有趣的是，凯洛格 – 李 – 约克关于布劳尔不动点的计算，并非是历史上的首次尝试。尽管他们当时不知道，早在 1967 年，美国耶鲁大学 (Yale University) 经济学教授斯卡夫 (H. Scarf) 在研究数量经济学时将求解一个经济模型的均衡点问题归结为求解定义在 n 维标准单纯形上的一个连续映射 f 的不动点问题。根据布劳尔不动点定理，这样的不动点存在。斯卡夫采用了所谓的单纯三角剖分方法，运用组合数学中的斯泊讷 (E. Sperner) 引理，跟随一条折线来近似 f 的不动点，从而设计了一种单纯剖分不动点算法。在七十年代，此算法被推广成求解非线性方程组的单纯不动点算法，成了热极一时的研究领域。 1974 年，当在美国克莱姆森大学 (Clemson University) 举行的第一届国际不动点算法大会组委会获悉凯洛格 - 李 - 约克的新方法时，立即提供了两张飞机票让他们赴会报告这一激动人心的结果。正如斯卡夫在其会议论文集《不动点算法及其应用》序文中所述： “对我们众多与会者而言，克莱姆森会议之令人惊奇之处在于凯洛格 - 李 - 约克关于计算连续映射不动点的文章。他们提出了第一个基於微分拓扑思想 - 而不是我们习以为常的组合技巧 - 的计算方法” 。虽然单纯不动点算法的研究目前已趋沉寂，以凯洛格 - 李 - 约克方法为初始点的现代同伦延拓法研究依然方兴未艾，在不同的领域生根发芽。如今，李天岩与凯洛格和约克一道是目前世界上被公认为非线性问题同伦法数值计算的创始人，并且对此重要的领域作出了巨大的贡献。

4 多项式系统数值解

自七十年代提出计算布劳尔不动点的同伦方法后至今，李天岩一直在求解多项式系统同伦算法这一领域辛勤地开拓着。解多项式方程组的根是相当有趣而且经常出现在应用科学上的问题。譬如说电路分配问题和机械手问题等等。同时这种问题也出现在混沌理论的研究中，如洛伦茨研究的具有混沌现象的四维常微分方程组的定常状态事实上是其右端多项式方程组的解。

对具有 n 个变数的 n 个多项式方程组，设其第 j 个多项式的阶为 d_j, 则代数几何中古典的比左 (Bézout) 定理给出此方程组所有孤立复数解总数的一个上界 $d_1 d_2 \cdots d_n$, 称之为对应于该方程组的比左数。但在绝大多数情况下，此上界远大于实际孤立解的个数，其典型例子为代数特征值问题。对应于 $n \times n$ 矩阵 A 的特征值问题的二次多项式系统之比左数为 2^n, 但 A 最多仅有 n 个特征值。

最近这些年来, 用同伦算法来解多项式方程组 "所有" 孤立解的研究引起了很大的注意。记 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 为一 n 元复未知向量。 1979 年，迦协 - 赞格维尔 (C. B. Garcia - W. I. Zangwill) 对解 n 元 n 个多项式方程组 $P(x) = (p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)) = 0$ 首先建立同伦 $H : C^n \times [0, 1] \to C^n$, $H(x, t) = (1 - t)Q(x) + tP(x)$ 。这里 $Q(x) = (q_1(x), q_2(x), \ldots, q_n(x))$ 的每个分量 $q_j : C^n \to C$ 是 $q_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_j^{d_j+1} - 1$, 其中 d_j 是 p_j 的阶数。他们证明了：若 0 是 H 的正则值，则 $P(x) = 0$ 的每一个孤立解都是同伦方程 $H(x, t) = 0$ 的一个相应的解曲线 $x(t)$ 当 $t = 1$ 时的终点。重要的是，曲线 $x(t)$ 绝不转弯回头。这样求解常微分方程初值问题 $x'(t) = -H_x(x(t), t)^{-1} H_t(x(t), t)$, $x(0) = x_0$, 其中 x_0 是 $Q(x) = 0$ 的解，我们就可以在数值上逼近 $x(t)$, 因此可找出 $P(x) = 0$ 的所有孤立解的逼近值。由比左定理知, $P(x) = 0$ 最多有 $d = d_1 d_2 \cdots d_n$ 个孤立解，而 $Q(x) = 0$ 却有 $d' = (d_1 + 1)(d_2 + 1) \cdots (d_n + 1)$ 个解。因此，为了保证找到 $P(x) = 0$ 的所有孤立解，我们必须去逼近 d' 条曲线 $x(t)$ 。这样在 $t \to 1$ 时，许多曲线都跑到无穷远去了。跟随这些曲线是个很大的浪费。

同伦算法计算多项式方程组所有孤立解的一大优点是它可并行化，因此可在并行机器上同时求解对应于不同初始条件的同一常微分方程。为了克服上述迦协 - 赞格维尔同伦法的缺陷，周修义 (S. N. Chow) 、莫莱特 - 派瑞特 (J. Mallet-Paret) 以及约克介绍了一个同伦 $H(x, t) = (1-t)Q(x) + tP(x) + t(1-t)R(x)$, 其中 $q_j(x) = x_j^{d_j} - b_j$ 及 $r_j(x) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i^{d_j}$, $j = 1, \ldots, n$ 。他们证明，除了测度为零的集合外，对几乎所有的 $(a, b) \in C^{n^2} \times C^n$, 追随同伦方程 $H(x, t) = 0$ 的所有 d 条解曲线，就可将 $P(x) = 0$ 的所有孤立解找出来。

八十年代初, 李天岩大大改进了同伦映射的构造。他证明, 对於初始多项式方程组 $q_j(x) = a_j x_j^{d_j} - b_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, 对几乎所有的 $(a, b) \in C^n \times C^n$, 追随同伦方程 $H(x, t) = (1 - t)Q(x) + tP(x) = 0$ 的 d 条解曲线一样可以找到 $P(x) = 0$ 的所有孤立解。

从八十年代开始，李天岩继续探索求解孤立解总数大大小於其比左数的多项式方程组。这样的方程组被称为亏损 (Deficient) 方程组。若用同伦法求解这种多项式方程组，从 $t = 0$ 开始我们必须追随 d 条曲线，在 $t \to 1$ 时，大多数的曲线都跑到无穷远去了，只能少数的曲线收敛，因此造成极大的浪费。

对於数值代数中最重要也是最常见的亏损多项式系统 - 矩阵特征值问题，李天岩与他的合作者们及学生们提出了用同伦思想求解大型矩阵所有特征值：将一个特征值为已知或易于求得的同阶矩阵 D 与所求矩阵 A 同伦，即定义同伦矩阵 $H(t) = (1-t)D + tA$ ，然后从 $t = 0$ 出发数值追随 $H(t)$ 的特征值和特征向量曲线，而当 $t = 1$ 时得到 A 的特征值与特征向量。他和其韩国博士生李弘九 (Noah Rhee) 第一个将这一思想在计算机上实现。此后他指导他的中国学生张红、李奎元、曾钟钢、丛栾、黄良椒、金鸣等进一步完善这一算法思想与数值实现。他们成功地发展了用于实对称矩阵、一般实矩阵、以及大型稀疏矩阵特征值计算的同伦算法。即使未考虑其可并行化的优势，仅用单个处理器，对许多大规模代数特征值问题，同伦算法优于基于 QR 分解的标准程序。

对於一般的亏损多项式方程组，构造一个好的同伦算法依赖于初始多项式系统的有效选取。这是因为不光多项式方程组 $P(x) = 0$ 的每一个孤立解均来自于初始多项式方程组 $Q(x) = 0$ 的某个解出发的同伦曲线，更重要的是我们希望尽可能少的同伦曲线当 $t \to 1$ 时趋於无穷。最理想的构造是 $Q(x)$ 与 $P(x)$ 有同样数目的在无穷远处的零点。近二十年来，李天岩与索耶尔 (T. Sauer) 、约克以及他的学生王筱沈、李星、高堂安等人运用代数几何的理论和方法，先后发明出选取 $Q(x)$ 的一些行之有效的方法，如随机乘积同伦法和 Cheater 同伦法。近十年来，由於伯恩希坦 (D. N. Bernshtein) 定理的应用，基於解个数组合计数的多面体同伦法倍受青睐。在其中，所谓的“混合体积” (Mixed Volume) 之计算至关重要。李天岩与他过去及现在的学生们已取得一系列令人瞩目的新成果，其详情可见他近期应邀为荷兰出版的数值分析手册所撰写的长篇综述性论文 [4] 。在多项式方程组数值解领域，李天岩无愧于其领军人之一之称号。

5 逆境拼搏

令人难以置信的是，李天岩三十年来在学术界的卓越贡献，却是在与身体上几乎无时无刻不受到的病痛作顽强搏斗中取得的。他在台湾清华大学读本科时，绰号叫作“棍子”。他除了学业成绩名列前茅外，在体育运动上也是一流的。他曾任清华大学篮球校队队长和校足球队队员。但当他 1969 年赴美国马里兰大学攻读博士学位的第二年开始，他就感到肾脏逐渐不好，但他依然异常用功，至 1974 年完成了八篇学术论文并取得博士学位。毕业后的六个星期，发现血压竟高达 220 – 160 毫柱。他于 1976 年 5 月 4 日开始长达五年半辛苦的洗肾过程，每周三次，每次五小时，还不包括往返时间。当时他的研究工作大半是在病榻上完成的。与他积极向上的精神相反，当时密执安州立大学统计系聘用的一位印度籍助理教授因肾病而沉沦，最终导致解聘。 1980 年 1 月 29 日，李天岩首次接受换肾手术，然而因排斥效应之影响，不久以失败而告终。 1981 年 7 月 15 日他成功地接受了他手足情深的妹妹的一个肾脏移植，在这之后的三年内，他的身体逐渐适应，康复不少。然而好景不长， 1984 年 2 月 21 日，李天岩发生中风，右半身全部麻痹，并于 4 月 26 日作了脑血管动脉瘤的大手术。在之后的七、八年，他的身体还算平静，虽无大手术，但局部麻醉的小手术却仍然不断。然而，李天岩趁此机会抓紧时机，在此数年内发展了同伦延拓求解特征值问题和多项式方程组的重要理论及方法，并培养了一批从中国大陆直接招来的博士研究生。除此之外，在此期间他除了几乎每年回台湾给予重要的系列演讲，更于 1985 年 6 月至 7 月首度访问了祖国大陆十余所大学与中国科学院研究所，给出了若干关于混沌动力系统、同伦算法等专题演讲，并

开始挑选接受大陆研究生，对于将数学根植于国内及提携后进不遗余力。

1993 年 1 月 25 日，李天岩在密执安州立大学讲课时，身体突然感到不适而昏倒送医，经医生诊断为脑动脉血管阻塞。其后，他以极其坚韧的毅力与无比的信念战胜了疾病。然而，从 1992 年起他就开始感到腿痛，看遍了无数的中医西医，都没有办法找出病因。后来才知道是背脊椎骨关节炎所引起，最后终于在 1995 年 5 月 30 日动了一次大手术将发炎的部位割掉。在之后的五、六年间，他的身体状况基本平静。然而进入本世纪第一年的 5 月 2 日，他又作了一次背脊椎骨的手术。之后腿疾虽不时困扰他，但从 2003 年渐有起色。他近年来勤于运动保养身体，每天要游泳一千公尺或步行二英里，身体状况比以前明显好转许多。可是，就在此文初稿正在写作之时的 2003 年 6 月，李天岩再次遭遇病魔的袭击。 6 月 24 日医生对他心脏动脉血管的阻塞进行了及时的治疗与处理。目前他的心脏血管已置入了八个支架。

在过去的几十年中，李天岩长期遭受疾病的巨大痛苦，然而他在逆境中全力拼博，以乐观的大无畏精神一次次战胜病魔。至今，他全身麻醉的大手术已有十次，局部麻醉手术则不计其数，全身都是开刀的伤痕。他是一个在逆境中求突破， “与病斗其乐无穷” 的人，凭藉着一股坚强的毅力及终极的信念去克服一切困难，在最艰难的环境下作出了第一流的研究工作。他常对他的研究生们说，若他们在学习、研究中遇到困难，只要想到他是怎样克服病痛的巨大困难，一切困难就迎刃而解了。正是因为这种超人的精神，尽管直至今日依然病痛缠身，李天岩一直在从未间断过的美国国家自然科学基金会资助下高效多产地工作着、工作着。

6 治学之道

李天岩几十年如一日具有严谨的治学态度。他常认为，他的成功之道除了有像约克教授这样的好导师，其不二法门无它，就是坚持。他常常对他的学生说，自己并不聪明，而是否聪明过人其实并不重要，能将问题弄个水落石出才重要。他常强调他对问题的看法只不过是比别人多坚持了一分钟。那宝贵的一分钟可能就是造就成功之路的一分钟。一个问题，大人物解决不了，并不表示小人物也解决不了，大人物思考问题的路径也不等於解决问题的路径。 “凭着一股牛劲，凡事坚持到底，绝不轻言放弃” ，是他叮咛学生们的名言。他也常说读书做学问一定要作彻底的理解，尤其是作数学，一知半解地记忆表面上的逻辑过程是没有用的。他曾举例说，一个矩阵的行秩为什么会等於列秩呢？其实学过线性代数的大二学生都会证明。然而它实际上所代表的几何意义是什么？物理上的涵义又是什么？从不同的角度来看这个问题时，你将会得到意想不到的结果。

李天岩在台湾上的大学，所以对中国高等教育中普遍存在的填鸭式教学深有体会，并深恶痛绝。他曾讲过这样的故事：一位数学研究生在其博士资格考试的口试时，教授要考她证明特殊的吉洪诺夫 (A. Tychonoff) 定理：两个紧集的乘积也是紧的，她央求教授让她证明一般的吉洪诺夫定理：任意个数紧集之乘积也是紧的，因为她记得证明的每一个细节而不知道怎样证明更简单的两个紧集的情形。李天岩坚决反对学生死记硬背，不求真懂。参加过他为自己学生设计的数学讨论班的历届研究生都不会忘记他对每一个报告者的基本要求：不要光讲 “$\epsilon - \delta$” 语言，那仅仅是逻辑，要讲思想，讲 “basic idea” 。他要求学生在演示证明一个

一般定理时，要先将具体的或特殊的情形解释清楚，坚决反对一开始就在抽象的概念里捉迷藏。他坚信，若是真正了解一门学科，就会讲得连普通人也能听得懂。他这样认为，也是这样身体力行. 他在世界各地应邀所做的数学演讲总是从最初等的概念入手，用最直观的观察引导，听众无不被他深入浅出的生动报告所折服。他也用这样的准则来训练他的学生。 1986 年，当他在国内招来的一个研究生给他报告斯梅尔 (S. Smale) 的学生雷列加 (J. Renegar) (现为美国康奈尔大学 (Cornell University) 教授) 的论文 "关于逐片线性道路追踪算法平均情形的复杂性理论" 时，他的第一句话便是 "你要把我当成笨蛋，我什么也不懂" 。当时这名学生十分纳闷，自己慕名而来求学的堂堂大教授，居然 "什么也不懂" 。正因为面对的是一个 "什么也不懂" 的数学家，这位学生懂得了什么是研究数学，什么是讲数学。

正因为李天岩独特的研究方法和讲课艺术，他不光获得密执安州立大学的杰出教授奖和杰出教学奖，也影响了他一批又一批的研究生在研究与教学上齐头并进。他的治学之道对一个数学家的成长具有典型的启发性。

参考文献：

[1] 李天岩， "关于 'Li-Yorke' 混沌的故事" ，为日本数学杂志《数学传播》所写的中文稿，十二卷三期， 13-16 ， 1988 。

[2] 李天岩， "Solving Polynomial Systems," The Mathematical Intelligencer, Vol. 9, No. 3, 33-39, 1987 。

[3] 李天岩， "求多项式方程组的所有孤立解" ，数学进展，十七卷三期， 260-266, 1988 。

[4] 李天岩， "Numerical solution of polynomial systems by homotopy continuation methods," Handbook of Numerical Analysis, Vol. XI, 209-304, North-Holland, Amsterdam, 2003 。

[5] 林文伟， "在逆境中拼搏的理学院杰出校友 - 李天岩学长" ，台湾清华大学校友通讯，2002 。

致谢：

作者感谢美国南密西西比大学研究生叶扬与叶宁军为本文写作提供无私帮助。

2003 年 6 月初稿； 2007 年 1 月修改。

作者简介：

丁玖，男，汉族人，籍贯江苏，于 1958 年 10 月出生于江苏省江都县。南京大学数学系 1977 级计算数学本科生、 1981 级硕士研究生。 1990 年获美国密执安州立大学应用数学博士学位，导师李天岩教授。现为美国南密西西比大学 (University of Southern Mississippi) 数学系教授。