自然的奥秘：混沌与分形

丁 玖

目录

“自然界的大书是以数学符号写的。”----- 伽利略

（一） 引子

2009 年的春天，新的一期《美国数学会会刊》(Notices of the American Mathematical Society)刊登的一篇题为“鸟与青蛙”的文章吸引了全世界许许多多的读者。这是生在英国、年逾八旬的美国普林斯顿高等研究院教授戴森 (Freeman Dyson, 1923-)应美国数学会之邀所作的上年度“爱因斯坦讲座”的讲演稿。这位在学术界备受尊敬的理论物理学家和数学家形象地描绘了近代自然科学发展四百年来从十七世纪的英国人培根 (Francis Bacon, 1561-1626) 和法国人笛卡尔 (Rene Descartes, 1596-1650) 到二十世纪的匈牙利人冯 · 诺依曼 (John von Neumann, 1903-1957) 和中国人杨振宁 (1922-) 等典型的两类学术巨匠：大鸟般的俯瞰大地者与巨蛙式的深入探究者。

戴森在文章中描述了与那些“鸟”和“蛙”融为一体的几大学科，并不吝笔墨地用了近两页的篇幅来讨论“混沌”研究的发展。

戴森：“在混沌领域里，我仅知一条有严格证明的定理，是由李天岩和詹姆斯 · 约克在 1975 年发表的一篇短文‘周期三意味着混沌’中证明的。” (In the field of chaos I know only one rigorous theorem, proved by Tien-Yien Li and Jim Yorke in 1975 and published in a short paper with the title, “Period Three Implies Chaos.”)

正如约克后来在寄给同一杂志的“读者来信”中第一句所述，他和李天岩“欣喜”地读到戴森接下来的评语：

“李-约克论文是数学文献中不朽的珍品之一。” (The Li-Yorke paper is one of the immortal gems in the literature of mathematics.)

为什么在演讲稿中甚至对大数学家冯 · 诺依曼都“颇有微辞”的戴森对李天岩-约克的那篇“immortal” 论文“情有独钟”？在这篇历史上第一次给予“混沌”这一普通名词之严格数学定义、在“混沌”、“分形”发展史上承前启后、继往开来的十页论文的背后，是什么样的风云变幻、扑朔迷离？

如今，“混沌”、“分形”的术语已在科学技术界家喻户晓。我们要追溯它们的历史，就必须首先请时光倒流一百年，去和被美国数学史家、1937 年初版的名著《数学伟人传》(Men of Mathematics) 的作者贝尔 (Eric Temple Bell, 1883-1960) 称为“最后的全能数学家”亨利 · 庞加莱 (Henri Poincare, 1854-1912) 来一番“亲密接触”。

（二）“三体问题”的困惑

真正意义上的现代物理科学大概是从英国实验物理学家伽利略 (Galileo Galilei, 1564-1642) 的意大利比萨斜塔自由落体的著名实验开始。伽利略死后一年而生、“站在巨人肩膀上”的无与伦比的 牛顿 (Issac Newton, 1643-1727) 24 岁前以“超过全人类的智能”，集前人研究成果之大成，提炼出他的“运动三大定律”，加上“万有引力定律”，构成经典力学的大框架。“英国人的骄傲”牛顿和“德国人的宠儿”莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716) 各自独立发明的微积分，早已成为每一个理工科大学生的必修科目。

正如牛顿爵士的墓志铭上写着的，“他几乎神一般的思维力，最先说明了行星的运动和图像、彗星的轨道和大海的潮汐。”质量已知、外力给定，加上初始条件，运动物体在任何时刻的空间位置就可被牛顿定律所确定。有谁不赞叹他天才思想的洞察、神工鬼斧的创造？有谁不感谢他那颗智慧的大脑给我们的世界带来的亿万财富？

春夏秋冬，日复一日，太阳每天从东方升起、在西天落下，钱塘江每年一次涨潮落潮的壮观景象周而复始。每一天，当我们清晨早起，迎着灿烂的阳光走向工厂、农场、机关、学校的时候，我们会感到世界似乎是那么的有序，一切如同牛顿力学的“决定论”哲学思想所描绘的那样。

可是，无序无处不在。湍急的水流、物种的变异、股票的走向、心脏的跳动，甚至我们自己的喜怒哀乐，等等、等等，无一不昭示着大自然和人类行为的随机性、不连续性、不稳定性这些不规则行为的方方面面。

对“世界有序”信条的第一次科学的挑战，在十九世纪末拉开了帷幕。正如美国记者格莱克 (James Gleick, 1954-) 在 1987 年出版的畅销书《混沌》的第一章“序曲”中所说：“混沌开始之处，就是经典科学终止之时。”

1885 年，瑞典和挪威国王奥斯卡二世 (Oscar II, 1829-1907) 为了庆祝他四年后的六十岁生日，提供 2500 克朗有奖悬赏求解我们赖以生存的太阳、地球、月亮这三大天体在相互之间万有引力的作用下，如果知道了在某个时刻它们的初始位置和初始运动，在后来任意的时刻它们的位置和速度是什么样？比如说，在一万年之后？这就是所谓的“三体问题”。两个物体的“二体问题” 又叫做“开普勒(Johannes Kepler, 1571-1630)问题”，它早在 1710 年就已被瑞士历史上最令人吃惊的伯努利家族前后跨越一百年、三代人中八

位“青史留名”数学家中第一代三兄弟最小者约翰 ·伯努利(Johann Bernoulli, 1667-1748) 首先解决了。但增加一个物体，难度的增加几乎是“无穷大”。

牛顿万有引力定律说，两个物体之间的相互吸引力跟物体质量的乘积成正比，跟它们之间距离的平方成反比。根据牛顿运动第二定律，物体运动的加速度乘上它自己的质量等于作用在该物体上的外力。加速度是物体运动速度的“变化率”，换句话说，它表示速度的变化有多快，而速度又是物体在空间中位置的变化率。一个变量的变化率就等于微积分中的“因变量关于自变量的导函数”，即所谓“函数的导数”。所以物体的加速度等于“物体的空间位置”这个函数关于“时间”这个自变量的“导数的导数”，即所谓的“二阶导数”。这样一来，由于每个物体在空间中的位置由它的三个笛卡尔“坐标”表示，“三体问题”对应于求解九个“二阶非线性微分方程”，并检查当时间愈来愈远时解的最终性态。可惜的是，方程组的解虽然存在，但没有办法可以写出它的具体表达式，就像大多数自然界的应用问题一样。

新的方法应运而生，它来自庞加莱那颗杰出的“水牛般的大脑袋”。

庞加莱曾被无产阶级革命导师和辩证唯物主义哲学家列宁半褒半贬为一个“伟大的科学家，渺小的哲学家”。但在第一次世界大战中，当对法国充满敌意的一位英国将军询问他的同胞、数学家和哲学家罗素 (Bertrand Russell, 1872-1970) 谁是法国现代最伟大的人物时，后者立刻答道：

“庞加莱。”

“什么？那个家伙？”将军以为罗素指的是法国的总统雷蒙 · 庞加莱 (Raymond Poincare, 1860-1934)。

当罗素知道那人如此惊愕的原因后，笑了一笑：

“我想到的是雷蒙的堂哥，亨利 · 庞加莱。”

庞加莱是研究领域包括纯粹数学与应用数学的几乎所有方面的最后一位数学通才，并对物理学许多领域，包括相对论，多有建树。他对数学和科学哲学的见解和论述，几乎让所有其他科学家望其项背。他的科学普及读物，像《科学与方法》，是科学专业人士和普通老百姓在巴黎的咖啡馆或公园里的读本，一百多年来被翻译成西方和东方多种文字出版，影响了几代人的科学思维和方法。由于其优美的语言表达和科学方法论著作的文学成就，他被选为法兰西学院文学部院士，这是对科学界人士的独特荣誉。

庞加莱出生于法兰西一个既显赫又杰出的家族，在童年时就显示出超群绝伦的智力。但有趣的是，已经成为那个时代一流数学家的他曾经参加过以同时代法国心理学家比奈 (Alfred Binet, 1857-1911) 名字命名的智力测验，结果是：如果他被当作孩子的话，大概属于“低能儿”。他一生当中的主要娱乐是阅读，其读书的速度快得令人难以置信，并有着比瑞士的大数学家欧拉 (Leonhard Euler, 1707-1783)更强的记忆力，这大概和他与生俱来的差视力有关。与一般人通常用眼睛帮助记忆不同，庞加莱几乎是靠耳朵，但与后来在一些国家中盛行的“耳朵识字”伪科学无关。事实上，在大学念书时，因看不见黑板上的字，他坐在后排听，不记笔记，只靠耳朵，非同寻常的记忆力派上了大用场。看来，近视眼的学生，大可不必花钱配眼镜，坐在课堂的后面听讲也许是锻炼记忆力的一大秘诀。

庞加莱 17 岁以第一名的成绩考入了法国著名的“巴黎高工”。他的数学天才“技惊四座”，别人的数学难题一告诉他，“答案就像一支箭似地飞了出来。”但他不善体育，绘画入学考试零分，差点被拒绝在校门之外，就像中国的大学者钱钟书 (1910-1998) 当初报考清华大学时那样。

从 1878 年提交数学博士论文给巴黎的法国科学院，到他 1912 年因病辞世，庞加莱在他不长的 34 年学术生涯中留给全人类近 500 篇数学论文和 30 多本覆盖数学、物理和天文等众多学科的著作，还不包括那些科学哲学的名著和为大众撰写的通俗文章。他去世前不久发表了他未能证明的一生中最后一个重要定理， 给后来者提出了前景美好的新的重要问题。这条与“三体问题”也有关系的所谓“庞加莱最后的几何定理”很快就被一名后起之秀、年轻的美国数学家伯克霍夫(George David Birkhoff, 1884-1944) 证明。为他一生画上句号的这条漂亮定理大意是说，如果你“保持面积”地双向“扭曲”一个像只“垫圈”的环形区域，让圆形的外边和内边分别按顺时针和逆时针方向旋转，则圆环中至少有两个点“不为扭曲所动”。

1889 年，庞加莱提交了他对“三体问题”的研究以及由此而生的对微分方程的一般讨论。这个理论不同于传统的那个只需要求出方程解公式的“定量理论”，而是探讨其表达式求不出的解的种种性质。虽然他未能完全解决“三体问题”，却在求解过程之中以及他生命的最后十年创立了“组合拓扑学”或“代数拓扑学”这一新学科。由当时健在的三个顶尖数学家，分别为德国人、法国人、和瑞典人的魏尔斯特拉斯 (Karl Weierstrass, 1815-1897)、埃尔米特 (Charles Hermite, 1822-1901) 和米塔-列夫勒 (Magnus Gosta Mittag-Leffler, 1846-1927) 组成的评奖委员会决定授于他奥斯卡国王的这一奖金。

魏尔斯特拉斯在写给米塔-列夫勒的评奖报告中赞美道，庞加莱的工作“是非常重要的，它的发表将在天体力学史上开创一个新的时代。”

但是，庞加莱获奖工作的基本假设是“同宿点不存在”。所谓的“同宿点”是关于一个“不动点”的“稳定流形”和“不稳定流形”在别处相遇的一个点。他起初认定这两个流形在别处不相遇，天下因此太平，大家都很高兴，他也拿到了 2500 克朗的奖金。

那一年的冬季，庞加莱的获奖论文开始印刷，准备发行。一名数学家和庞加莱本人在校对样稿时都发现了其中的一些地方证明不太清楚。认真负责任的庞加莱开始全力以赴地修改这些部份，并且通知杂志的主编收回了已经印出的杂志予以销毁。他还主动自掏腰包地付了 3585 克郎，赔偿出版社的经济损失。这就是说，除了贴上他的奖金，他还倒赔了一千多克郎。但这个人的小损失，换来了人类的大进步。修改后的文章增加了将近三分之一的篇幅。正是这次修改导致了他对“同宿点可能存在”的伟大发现。

最终，庞加莱的这篇长达 270 页的论文“关于三体问题的动力学方程”于 1890 年 10 月在瑞典领头数学家米塔-列夫勒所创办的《数学杂志》(Acta Mathematica)上发表。从此，他一不做二不休，乘胜前进，自 1892 年到 1899 年一口气地撰写了三大卷充满新思想的宏伟巨著《天体力学的新方法》。

庞加莱首先证明了三体问题不像二体问题，不可能通过发现各种“不变量”来把问题“化繁为简”以获得解析解，这就让他那一代的数学家们想找到三体问题显式解的梦想破灭，彻底地重塑人们研究微分方程的基本想法。

更为重要的是庞加莱发现，三体问题微分方程组的稳定流形和不稳定流形由于相交而产生同宿点，因此引起方程的一般解在某些区域具有异常复杂的状况，以至于对于给定的初始条件，几乎是无能为力来预测当时间趋于无穷大时，这个解曲线的最终命运。

庞加莱对找不到解的解析表达式的微分方程解的一般理论，导致了用几何和拓扑方法研究微分方程解的“定性理论”的诞生。这门学问现在被纳入称之为 “动力系统”的大范畴。他在研究天体运动的“三体问题”时已经清楚地知道它的解对初始条件的“敏感依赖性”，以及解的最终性态的“不可预测性”。可以说，他是人类历史上懂得自然界混沌可能性的第一人。

今天，即便是学过非线性微分方程“初级理论”的大学高年级学生也已知道，混沌可以出现在看上去很简单的“双摆”或“多摆”运动之中。为什

么高中物理或大学普通物理课的老师并没有告诉这一事实？也许他们也被伽利略或荷兰大物理学家惠更斯(Christiaan Huygens, 1629-1695)这样的“先知先觉”所“误导”。我们高中第一学期曾经学过的没有阻力的单摆运动是像一百年前上海资本家大亨家的客厅里那只时髦大挂钟下端的“摆”一样周而复始、来回不停的“小幅摆动”。在这种“理想”的小振幅情形下，十七世纪的实验物理学家们坚持不把摆动的角度改成它的“正弦”值这个精确数，只因为小角度的正弦值可以用测量角度的“弧度”值来代替，误差是“微乎其微”的。这样一来，万事大吉，正确的二阶非线性微分方程近似成简单的二阶线性微分方程，“非周期运动”的可能性就从这个“忽略”中溜走了。

如果我们的单摆可以摆动任意角度，惠更斯名垂千史的那个“摆的周期定律”就成了“谬误”。我们只好又回到那个精确的、基于牛顿力学的、包含摆动角度正弦的非线性微分方程。如果我们做一点点试验，把单摆的“初始角度”取得比较大，再给它某一些“初始角速度”，也许能见识到其他类型的摆动形式。几十年来，一些喜欢动动手玩玩游戏的混沌学家制作了基于“摆”的混沌装置，如“太空球”和“球面摆”，它们有时有条不紊地有节奏摆动着，有时却处于变化莫测的混沌运动之中。

庞加莱的获奖论文和那三卷大书奠定了现代天体力学和动力系统研究的基础，尽管他的众多想法要等几十年以后才慢慢地被一批“思考者”所领悟而进一步推进。他太超越一百年前的那个时代了。直到近半个世纪之后，由于第一个“遍历定理”的证明，第一台电子计算机的问世，成就了第一代的“非线性分析”的先驱们，从而兴起了后来者们混沌学研究的热浪。

（三） 非线性分析的先驱

位于美国西南部靠近墨西哥的新墨西哥州的洛斯阿拉莫斯 (Los Alamos) 国家实验室是世界上第一颗原子弹诞生的摇篮。被公认为“原子弹之父”、第二次世界大战后曾任普林斯顿高等研究院院长的美国物理学家奥本海默 (Robert Oppenheimer, 1904-1967)领导了这个代号为“曼哈顿工程”的原子弹研制工作。李政道 (1926-) 芝加哥大学博士论文导师、1938 年在瑞典参加他荣获诺贝尔物理奖的颁奖仪式后即赴美国定居的意大利人费米 (Enrico Fermi, 1901-1954)，杨振宁在同系的博士论文导师、长寿的匈牙利人特勒 (Edward Teller, 1908-2003)，“电子计算机之父”、特勒的同胞冯 ·诺依曼，“氢弹之父”、波兰人乌拉姆 (Stanislaw Ulam, 1909-1984)，以及博士论文还未来得及答辩、将获得未来诺贝尔物理奖(1965) 的美国人费恩曼 (Richard Feynman,

1918-1988) 等物理学大家、数学天才聚集在奥本海默的周围，为了击溃法西斯、赢得二战胜利献出了他们的智慧。有点悲剧性的是这些极度爱国的科学家中那些直接接触过放射源的宝贵人才，如费米、冯 · 诺依曼和费恩曼，都患癌症英年早逝，就像中国的“原子弹之父”邓稼先 (1924-1986) 那样。

约翰 · 冯 · 诺依曼大概是上世纪全世界最聪明的数学家，让美籍德国物理学家、“曼哈顿工程”理论部主任、1967 年诺贝尔物理奖获得者贝特 (Hans Bethe, 1906-2005) 感叹不已：

“冯 · 诺依曼这样的大脑是不是意味着存在比人类更高一级的生物物种？”

比冯 · 诺依曼大一岁并同在匈牙利一个精英中学相差一届毕业的魏格纳 (Eugene Wigner, 1902-1995; 1963 年诺贝尔物理奖获得者) 终生对他似乎有一种近乎自卑的情结藏于心中：

“不管多么聪明的人，和冯 · 诺依曼一起长大就一定会有挫败感。”

虽然冯 · 诺依曼被视为“现代计算机之父”和“博弈论之父”，他认为自己最重要的贡献都在数学上：希尔伯特空间的自共轭算子理论、量子力学的数学基础和以他名字命名的“冯 · 诺依曼平均遍历定理”。然而，在他临终前的美国首都华盛顿里德医院病房里，对现代数学几乎一窍不通的美国国防部正副部长、陆海空三军司令以及其他军政要员“围聚在他的病榻前，聆听他最后的建议和非凡的洞见。”

作为洛斯阿拉莫斯国家实验室的顾问，当时最受美国政府尊敬的数学家冯 · 诺依曼邀请了他终生的朋友和知音、比他小五岁多的另一位数学奇才斯坦 · 乌拉姆加盟洛斯阿拉莫斯。从此，这位不到二十岁就以证明无穷集合重要定理而留名数学史的神童和具有非凡创造力的理论家，就开始与物理学家为伍，一只脚从纯粹数学的天空跨进了应用学科的地盘。

和冯 · 诺依曼一样，斯坦 · 乌拉姆也是犹太人，生于律师之家。在其 1976 年初版的自传《一个数学家的经历》一开头，他回忆到四岁时就对家中东方地毯的复杂图形着迷。十一岁前，当他目视着父亲书房内一本欧拉的书《代数》，那种“神秘的感觉”油然而生。在那个现在国际数学界已名闻遐迩的“苏格兰咖啡店”，年轻的乌拉姆和他的老师之一、现代数学分支“泛函分析”集大成者、二战结束时因长期饥饿和重病而“壮志未酬”的杰出波兰数学家巴拿赫 (Stefan Banach, 1892-1945) 等数学师友们持续不停地提出、

讨论、争执以及解决数学问题，其集体思维磨擦出的阵阵火花被他们及时地记录在著名的“苏格兰笔记”上。乌拉姆自己也经常惊奇“黑板或草稿纸上的一些乱涂会改变人类发展的进程”。

乌拉姆是科学计算中十分有用的“蒙特卡罗法”的提出者之一。他 1960 年出版的一本仅有 150 页的“小”书《数学问题集》是启迪跟随者们研究灵感的凝聚物。他的两本文集《集合、数、及宇宙万象》和《科学、计算机、及故友》，充满令人称奇的数学智慧和超越时代的科学思想。他无愧于去世后，世人慷慨赠与他的“贤者”(Sage) 这一崇高称号。

正如冯 ·诺依曼的一位传记作者所说，招入乌拉姆是冯 ·诺依曼“对原子弹做出的两大贡献之一”。这两大贡献，一是找到了帮助洛斯阿拉莫斯数学化的快捷方式，二是爆聚炸弹。对于后者，在 1945 年 5 月德国投降后的 6 月 6 日冯 ·诺依曼写给乌拉姆的信中，他认为是乌拉姆的数学而不是其他的什么人做出了最大的贡献。信中说：

“当我听说物理学向集合论无条件投降时，特别高兴。我认为独特的问题就应该有独特的解决方法才对。尽管基地知识界鱼龙混杂，你几乎可说是这个想法之父。”

无独有偶，在几年后的氢弹研制中，乌拉姆再一次发挥了神奇的作用。1991 年再版的乌拉姆自传之后记中，他法国出生的太太弗兰科斯 ·乌拉姆回忆了令她牢记在心的 1951 年 1 月 23 日那一天中午：

“我发现他正在家中起居室表情奇怪地凝望着窗外的花园，说道，

‘我找到了一个让它工作的途径。’

‘什么工作？’我问。

‘氢弹’，他回答道。

‘这是一个全然不同的方案，它将改变历史的进程。’”

乌拉姆过世后，美国主流新闻杂志的悼念文章中说他“确实是氢弹之父”。乌拉姆和特勒在洛斯阿拉莫斯的上司贝特早在 1968 年就评述道：

“氢弹被造后，记者开始称特勒为氢弹之父。为了历史起见，我认为这样说更精确：乌拉姆是父亲，因他提供了种子；特勒是母亲，因他‘十月怀胎’。至于我，我猜我则是助产士。”

尽管笼罩在战时的紧张气氛之中，洛斯阿拉莫斯国家实验室自由、宽松的学术研究气氛，与乌拉姆的工作方式很合拍。他不必按时上下班，在帮助科学家、工程师们进行原子弹设计计算之余还可以继续他天马行空般的、与原子弹无直接关系的数学研究。

四十年代的中后期，随着冯 · 诺依曼帮助研制成功的第一台现代电子计算机的出现，方便而又快速的数值计算极大地帮助了创造型数学家的大脑思维，成了他们提出问题、解决问题的好帮手。作为最早接触现代计算机的数学家，在与像费米这样的大物理学家合作解决物理问题的过程中，冯 · 诺依曼、乌拉姆就和费米等人成了“非线性分析”这一集数学、物理、计算机等学科于一身的科学领域的开创者。

我们生活的世界在“时间”这位统帅的率领下昂首阔步地向前进，直到乐观主义者的“无穷远”，或到悲观主义者“世界末日”的有穷远为止。不管怎么样，天生具有好奇心的人类都想预测未来，甚至是最终的未来。一门新学科“非线性分析”由此而诞生，它不久也被称为“动力系统”。对于这门学科和后来的“混沌学”的联姻关系，乌拉姆曾戏称道：

“把混沌研究称为‘非线性分析’，好比是把动物学叫做“非象类动物的研究。”

非线性分析的目的主要是探索任何随时间而变化的量当时间走向无穷大时的“最终性态”。时间是一个连续的自变量，它对应的函数变量往往满足一个微分方程，就像十九世纪末期庞加莱研究“三体问题”以及二十世纪中叶洛伦茨预测天气变化用到的那些根植于牛顿力学的微分方程。研究微分方程的解当时间趋于无穷大时的表现的那部分“动力系统”称为“连续动力系统”。为了把一些复杂的问题简单化一点，我们也可以把时间的长轴分成同等长度的无穷多个时间段，最方便的划分是让时间取所有的正整数值 1, 2, 3, 4, 5, … 。这样，微分方程解的渐近性态就成了“解在时间为 1 时的值”所定义的某个函数的逐次迭代之渐近性态。这就是被称作为“离散动力系统”的另一个学科所要做的事。

想象力丰富并且喜欢做“梦”的我国古代先秦战国时期的哲学家庄子(约前 369-前 286)无意中曾经叙述了一个离散动力系统问题：

“一尺之锤，日取其半，万世不竭。”

这不光包含了古人关于“无穷”的思想，而且，用离散动力系统的语言说，他所表达的问题就是从初始数 1 开始，每次除以 2，无穷次地除下去，最后的数将趋向于 0，这是该计算过程之前就可以预测到的未来结果。

在数学上，庄子的问题可翻译成迭代简单的线性函数 $f(x) = x/2$。中学生都知道，线性函数的图像是一条直线，这条直线和笛卡尔发明的 xy−直角坐标系的的东北−西南方向对角线有一个交点，这个交点的横坐标和纵坐标相等，所以该函数在这一点的值等于自变量的值，称之为函数的“不动点”。如果我们嫌计算函数迭代太化费时间，有一条“几何的快捷路径”可走：

首先在x−轴上代表初始值x_0的那个点沿着竖线走，直到和函数的图像相交，在交点处向左或向右转弯沿着横线走，一直走到和对角线相交，这个交点就代表第一个迭代点x_1。然后从这点沿着竖线走，一直走到和函数的图像相交，在交点处向左或向右转弯沿着横线走直到和对角线相交，这个交点则代表第二个迭代点x_2。如此走下去，我们就依次得到对角线上代表迭代点x_1, x_2, x_3，x_4, x_5, … 的一个点列。

把这个快速的几何方法用到一个线性函数，我们发现，随便从哪一个初始点出发，对角线上那些迭代点的序列要么趋向于函数图像和对角线的那个交点，要么越走越远，最终走到无穷远。无论如何，这些迭代点的最终性态是可以预测的，这可不是未来的混沌学家想要看到的那样。因而，线性函数的迭代是没啥可看的。“幸运”的是我们生活的世界几乎处处是非线性的。

对于非线性的函数，更有趣的现象“纷至沓来”。譬如说，冯 · 诺依曼曾经建议用如下的简单方法来产生区间 [0, 1] 上的“随机数”：任取一个六位小数，平方一下，再砍掉小数点后的前六位数字，得到下一个六位小数。重复同一过程就得到一列随机数。这相当于无穷次迭代非线性函数 $f(x) = 1000\, x^2 \pmod 1$，其中括号内的符号意思是砍掉函数值结果的整数部分。

对于“一般”的非线性函数，早在 1931 年，在不到 30 岁那几年已经硕果累累的冯 · 诺依曼就证明了第一批“遍历定理”中的第一个。这就是被他自己视为一生中三大数学贡献之一的“冯 · 诺依曼平均遍历定理”。受他工作的灵感启发，美国本土成长的哈佛教授伯克霍夫很快证明了“伯克霍夫逐

点遍历定理”，并抢先一步发表，这让解决问题太快的冯 · 诺依曼有点儿自责：为什么自己不多走几步呢？这些第一代遍历定理大致是说，如果无穷次地迭代一个“遍历”的非线性函数，迭代点序列访问“相空间”内某一区域的“频率”恰恰等于这个区域关于整个空间的“相对大小”。这个事实简称为“时间平均等于空间平均”，从而奠定了统计力学中不太严密的“波尔茨曼 (Ludwig Boltzmann, 1844-1906) 遍历假设”之严密的数学基础。可惜这位现在看来越来越伟大的奥地利物理学家再也不能“破涕为笑”了，因为早了四分之一个世纪他就因长期忧郁而最终自缢身亡。

1947 年，乌拉姆和冯 · 诺依曼研究了当今已成为“混沌学”这个学科中最有名气的“混沌函数”之一、所谓的“逻辑斯蒂模型” $f(x) = 4x (1 - x)$。这是一个初中生都认识的二次多项式函数。它的函数图像是个开口朝下的抛物线。因为当 $x = 0$ 或 $x = 1$ 时函数值都等于 0，这个抛物线通过 xy−直角坐标系中 x 轴和 y 轴的交点，称为直角坐标系的“原点”，和 x−轴上位于原点右边与原点相距为 1 的那个点。更进一步地细看，这个抛物线顶点的横坐标为 $x = 1/2$, 纵坐标为 $y = 1$。所以当自变量 x 限制在 0 和 1 这两个数之间时，对应的函数值也位于 0 和 1 之间。这样一来，函数 f 把线段 [0, 1] “映入”到它自己之中，即 x 属于“区间”[0, 1] 隐含着 f(x)也属于[0, 1]。

于是，闭上眼睛在[0, 1] 区间中随机地捡一个数x_0，我们可以不断地迭代函数f，得到位于[0, 1] 区间上的一系列数。我们可以设想f 是一个“函数机器”，它输进的“毛胚”是自变量值x，输出的“产品”是对应的函数值 f(x)。迭代函数就相当于不断地把当前的函数值再输回到函数机器内得到下一个函数值。如此循环地做下去，我们就得到下面的“无穷点列”：

x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $x_4 = f(x_3)$, … 。

乌拉姆和冯 · 诺依曼知道这些迭代点依次在线段[0, 1]上像俄罗斯作曲家柴可夫斯基(Peter Ilyich Tchaikovsky, 1840-1893) 的芭蕾舞剧《天鹅湖》中的可爱白天鹅那样“翩翩起舞”，跳来跳去。它们会像波兰伟大的爱国钢琴家肖邦(Frederic Francois Chopin, 1810-1849) 的指尖在琴键上弹奏出他那大气磅礴的钢琴曲“革命”吗？

乌拉姆和冯 · 诺依曼想知道这些看上去“无序”排列的迭代点是否在某种意义下“有序”。这个“意义”就是“或然率”，在数学上它有一个专门化的名词：概率。

概率的问题到处可见。乌拉姆的祖国同胞和“非线性分析”的接棒人、已故波兰科学院院士洛速达(Andrzej Lasota, 1932-2006) 这样讲概率：

“你准备离开一间屋子时，你出门的时侯有可能前后相差一分钟。随着时间的推移，又有不同的概率及可能发生的事要去考虑。比如，有百分之十的可能，你会发生车祸，而被送往医院；或许，有百分之十的机会，你会遇见从未谋面的漂亮女子，而深深为之倾倒，一切皆是偶然。所以事情会演变得愈来愈复杂，所有的事都牵涉到概率。”

故约克曾经略微夸张地宣称：数学是概率的一部分。

乌拉姆和冯 · 诺依曼考虑了如下的“概率问题”：任取[0, 1] 区间内的一个子区间，记为 [a, b]， 这些迭代点的无穷序列的每个点跳进这个子区间的总的或然率为多少？算出或然率，就要先算出总数为有限的点列中符合要求的那些点出现的“频率”。假如 10000 个点中有 4000 个点进入 [a, b] 子区间，那么频率就是前一个数被后一个数除，等于五分之二。同样的道理，在

x_0，x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，…，x_{n-1}

这 n 个点中，若有 k 个点进入 [a, b] 子区间，那么进入该子区间的点的频率为一个分数 k/n。所有迭代点中进入 [a, b] 子区间那些点的或然率就等于 当所有迭代点的个数 n 越来越大直至无穷时，对应的频率值愈来愈趋近的那个数，如果这个“极限”数的确存在的话。

乌拉姆和冯 · 诺依曼发现，对所有的子区间 [a, b]，这些概率值不光存在，而且等于位于[a, b]上方的一个“曲边矩形”的面积，并且对于“几乎处处”所取的初始点 x_0 都一样，即概率值只依子区间而定，而与初始点的选取无关。这个矩形的上边是一条形状像下垂的绳子的曲线，该曲线是他们找到的“概率密度函数”$y = 1/\{\pi[x(1-x)]^{1/2}\}$ 的图像。

因此，乌拉姆和冯 · 诺依曼告诉我们：“无序”排列的迭代点列在概率的意义下可以是“有序”的。

从这个密度函数图像的形状可以看到，它在左边半个区间上是“递减函数”，像下山，在右边半个区间上是“递增函数”，像上山。并且当 x 的值越靠近 0 或 1 时，函数值越来越大，最后趋向无穷大。由此可知，区间 [0, 1]

内两个小区间，即便有同样的长度，若一个比另一个更靠近 [0, 1] 的两个端点之一，则它对应的曲边矩形的面积比另一个大一点，因而迭代点序列进入第一个小区间的概率比第二个小区间的更大。这说明“逻辑斯蒂模型”这个二次多项式函数的迭代点序列在区间 [0, 1] 上不是“一致分布”的，在区间两端点旁比中央部分聚集着更多的点。如果好奇心强的读者还想看看这些点到底是怎样密密麻麻地分布的，可以进入美国波士顿大学数学系教授、斯梅尔的弟子中动力系统教科书写得最多的蒂凡尼(Robert L. Devaney, 1948-)的“动漫网站”(http://math.bu.edu/people/bob)，去亲手体验函数迭代的乐趣。

这是乌拉姆和冯 · 诺依曼的“非线性分析”在数学分支“遍历理论”的花园中为我们采集的一朵“绚丽的小花”。遍历理论研究“确定性”动力系统诸多的概率统计性质，是集测度论、泛函分析、拓扑学、近世代数等知识于一身的综合性纯数学科目，同时也在物理、生命科学和工程科学中应用广泛，如统计物理、电子线路，以及与我们日常生活密切相关的无线电话，甚至目前最有人气的网络搜索引擎“谷歌”(Google) 的研究也用到它。

然而，非线性分析的“星星之火”并没有很快在科学的茫茫大地上燎原开来，直到十年后一位终生喜爱天气的美国人无意中点燃了新的火种。

（四） 蝴蝶效应

天气预报是个古老并与我们的日常生活密切相关的问题。我们每天都要看看天气预报以决定出门是否带伞。远古时代的天气预报大概主要靠“猜”或“根据经验”，故传统的方式不太像科学，更像“感官性”的技术。现代天气预报基于求解描述大气运动的微分方程组。理想的情况是我们能够预报长期的天气走向。如果能知道明年的今天天气是怎么样，那多么好啊，但是中央电视台的天气报告员就要伤心难受，因为饭碗可能要丢。这个科学幻想小说中可能描绘过的美好前景能够实现吗？

上世纪在非数学的领域中对全人类可能贡献最大的纯粹数学家冯 · 诺依曼是天气预报的乐观主义者。在他短暂的五十三年寿命最后的几年中，牛顿式的、法兰西皇帝拿破仑 · 波拿巴(Napoleon Bonaparte, 1769-1821)军事学校十六岁时的考官拉普拉斯 (Marquis Pierre-Simon de Laplace, 1749-1827) 发扬光大的“决定论”哲学思想占据着他智慧的大脑，认为描述天气的方程就像描述行星的方程一样，都由牛顿力学确定，既然彗星能被精确预见多少年后再次光临，天气为什么不能被精确地预报呢？不光如此，他热情地展望，随

着大规模科学计算的可能性跟随着计算机的发展而“接踵而至”，人工控制天气的美好时代也将会“随之到来”。

天气变化是一个复杂的过程，但它被流体力学的基本定律支配着。天气预报依赖的是求解对应的偏微分方程组，它们的解是温度、气压、风速等这样的函数变量，它们以时间及其地球表面上空一定高度内所有点的三个坐标数作为自变量。要确定从某个初始时刻起以后依赖于时间和空间位置的天气变化的方程解，我们必须知道在那个初始时刻的温度、气压、风速等的空间分布。而这些初始数据可以通过密布全球的观测站收集。所谓的“数值天气预报”，就是数值求解偏微分方程组“离散化”后的代数方程组，观测资料越多，这些方程组的尺寸就越大，天气预报的准确度也就越高。但这在现代计算机出现之前的几百年间是难以做到的。

自从冯 · 诺依曼五十年代初在位于美国新泽西州的普林斯顿高等研究院造出第一台计算机，他就立下矢志，让越来越强大的计算机为天气预报，以及更进一步控制天气，成长为一位“人造的英雄”。真可惜，他千万没有想到，操纵天气变化的微分方程内在的性质即将扮演着“反英雄”的角色，让他所有的雄心壮志化为乌有。

1961 年冬季的一天，爱德华 · 洛伦茨 (Edward Norton Lorenz, 1917-2008) 教授像往常一样地走进他任教的美国麻省理工学院气象系的办公室，继续用他的那台 Royal McBee 型的简陋计算机来计算与天气预报有关的三个简单非线性微分方程的初值问题的数值解。

洛伦茨 1917 年出生于美国东北部新英格兰地区的康涅狄格州西 Hartford 市，从小就是一个气象迷，每天都在他家房子外面注视那个测量气温的温度计上的记录。他先后在达特茅斯学院和哈佛大学学数学，最后获得达特茅斯学院的数学学士学位。在第二次世界大战中的 1942 年直至战后的 1946 年，他如愿以偿地成为美国空军的一名气象预报员。二战结束后，他又回到了学校读书，兴趣自然转向到气象学研究，故决定学气象，并从麻省理工学院拿到这个领域的两个学位。他最终成了这所名校的气象学教授。

一年前，也就是 1960 年，洛伦茨选择数值天气预报方程时，选取了十二个微分方程来决定十二个变量，用计算机来模拟天气。一打方程，对于当时的计算机计算起来还是有点多。最后，他决定从耶鲁大学某个教授研究过的一组七个方程中选出三个，这些方程描绘流体的对流运动，即受热流体的上升运动，就像当我们夏天走在被太阳烤热的柏油马路上看到的冉冉升起的

气流那样。这三个方程是非线性的，却是十分简单的非线性，只有二次项出现，并能对他制造的“玩具天气”令人信服地模拟。

这一天，与往常一样算了一阵子之后，为了去喝咖啡，洛伦茨暂停了计算，只是把计算机终端上的数据抄了下来，作为再次计算的初始数据输入计算机，然后他穿过大厅下楼喝咖啡去了。

一小时之后他回到办公室，十分吃惊地看到计算机并没有精确地重复老结果，这不是理所当然的事。照理说，程序一样，初始值一样，输出结果也应该一样。难以理解的是，他发现新的计算结果同上一次的计算结果随着时间的推移迅速偏离，面貌全非。不到几个“月”时间，“天气”完全不一样了。严谨而又细心的他将信将疑地重新算了几次，类似的现象在反复试验中总是出现。他的脑海里立刻闪过一个念头：计算机坏了。

但是，计算机完好无缺。一霎那，洛伦茨明白了。这个伟大的理解，借用格莱克的语句，“播下了一门新科学的种子。”

原来，计算机内存中的数据保持六位小数，输出时为了节省空间，只打印了四舍五入后留下的三位小数，比如 0.123456 打成 0.123，0.456789 打成 0.457。他喝咖啡前抄下的数据只有三位小数，与旧的计算结果仅仅相差不到千分之一而打进计算机的初始值，新的计算结果和原先预期的计算结果就会大相径庭，这真是奇怪的现象，与人们通常的观念相悖。

通常的观念是：小的输入误差导致小的输出误差。这是一切物理、几何测量的依据。任何测量都有误差，但只要误差足够小，结果就足够精确。譬如要算出一个正方形的面积，经验告诉我们，只要边长量得足够仔细，算出的面积就足够满意。

但是，小的输入误差也会导致大的输出误差。如果我们用天文望远镜来观察月亮上的一个物体，望远镜仰角极小的增加就会把我们的视线落在另一个相距甚远的目标上。这是因为地球和月亮之间的距离，作为角度测量误差导致弧长误差的“放大因子”，是太大了。

即便放大因子不太大，重复不断的放大也会“聚沙成塔、集腋成裘”。让我们做个简单的“数学实验”。随便取一个 0 和 1 之间的数，加倍一下。如果结果还在 0 和 1 之间，就得到下一个数，再做同样的事；如果结果比 1 大，就砍掉它的整数部分，得到下一个数，再做同样的事。如此周而复始，给出一个迭代过程，所有的迭代点都落在 0 和 1 之间。

这个迭代产生的数列的每一个数都是前一个数乘以 2，再去掉整数部分。例如，如果第一个数是 0.1，那么它后面的数为 0.2，0.4，0.8，0.6，0.2，等等。如果第一个数有了 1% 的误差，那么第二个数的误差就为 2%，第三个数的误差为 4%，以后依次为 8%，16%，32%，64%，等等。我们看到，第七个数的误差就比初始误差放大了 $2^6 = 64$ 倍。

洛伦茨在他的计算中看到了这种“对初始值的极端敏感性”。他终于领悟到这一异常现象根植于天气预报所依赖的微分方程组的这个内在特性，而不是什么计算过程中的舍入误差在作怪。后来，在他写的《混沌的本质》这本有中文译本的书里，他再一次回忆到他当时的想法：

“如果实际大气的形态像这一简单模式的话，那么长期天气预报将是不可能的。温度、风以及其他和天气有关的量，确实不能精确地测量到三位小数。即使能够这样，但在观测点之间进行内插也不能达到类似的精确度。我有些激动，并且很快将我的发现告诉了一些同事。最终，我确信小的差别的放大是缺乏周期性的原因。”

洛伦茨由此得出结论：

“一个确定性的系统能够以最简单的方式表现出非周期的形态。”

洛伦茨把他的发现和分析写成了论文“确定性的非周期流动”，发表在《大气科学杂志》1963 年的第 20 卷上。日后，他把这一现象形象地比喻成“蝴蝶效应”，用在了他 1979 年 12 月 29 日在美国科学促进会的演讲题目：“可预见性：一只蝴蝶在巴西扇动翅膀会在得克萨斯引起龙卷风吗？”

天气预报的“蝴蝶效应”由于格莱克 1987 年那本面向大众的国际畅销书《混沌》而成为路人皆知的一个形象说法、一个专用名词。美国南密西西比大学数学系的费 (Temple H. Fay, 1940-) 教授找到一个简单的三角函数，用极坐标画出的图像看上去是一只美丽绝伦的蝴蝶。他的漂亮作品发表在 1989 年 5 月期的《美国数学月刊》(The American Mathematical Monthly)上（见维基百科网页 http://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_curve_(transcendental)）。

约克对“不可预测性”的概念也有过形象的说明：

“生命中是充满着小改变导致大变化的情形。例如说车祸，假如人们早个或晚个十秒钟出门，或许就可避免一场车祸。所以小小的改变可以导致很大的变化。”

这也体现在中国的成语“差之毫厘，谬以千里”之含义中。“控制论之父”、美国第二个“国家科学奖”的获得者维纳 (Norbert Wiener, 1894-1964) 曾引用过这样的一首民谣：

钉子缺，蹄铁卸；

蹄铁卸，战马蹶；

战马蹶，骑士绝；

骑士绝，战事折；

战事折，国家灭。

它十分形象地描绘了日常生活和社会变革中随手拈来的混沌现象。

在自然科学领域，混沌现象的发现与相对论、量子力学一起被一些科学家们誉称为二十世纪物理学上的三大革命。混沌这门学科的第一次国际会议 1977 年颇具意义地在文艺复兴时代的发源地意大利召开。大会组织者之一、美国佐治亚理工学院的物理学家福特 (Joseph Ford, 1927-1995) 说：

“相对论除去了绝对空间与时间的幻想，量子力学清除了可控测量过程的牛顿梦，而混沌学则宣告了拉普拉斯决定论式可预测性的幻灭。”

劲头十足的动力学家们继续研究混沌。法国庞加莱未竟事业的继承人之一、在巴黎郊外那个可视为美国普林斯顿高等研究院对等物的高等科学研究所钻研数学和远足探险并举的物理学家茹厄勒(David Ruelle, 1935-)和他的访问者、荷兰数学家塔肯斯 (Floris Takens, 1940-2010) 1971 年发现令人生畏的湍流与充满混沌的一种他们命名为“奇异吸引子”(Strange Attractor) 的几何结构有关。他们的题为“湍流的本质”这篇论文，虽然全是数学风格，充满定义、定理和证明，却给了求解这一物理难题一个全新的视野。

所谓“奇异吸引子”是指一个动力系统的解曲线最终被一个混乱的吸引子吸去了。也就是说，若我们跟随这些曲线走，最后会趋近于一团混乱的状态，毫无规则可寻。这种奇异现象在二维空间的微分方程里，不会发生，这是因为庞加莱-本狄克森(Ivar Otto Bendixson, 1861-1935)定理所致：在二维平面内，从任一点出发并不能自我相交的有界的一维解曲线，就像那些极权专制国家的人民那样无甚自由度，无处可跑，只好趋向于一个平衡点或称之为“极限环”的一条闭曲线这个周期解。在像洛伦茨所碰到过的三维或更高维

的微分方程，空间的自由度加大了，颇像自由的公民享用的民主政治，解曲线可以肆无忌惮、见缝插针地到处乱窜，就有可能产生“奇异吸引子”。

一下子“奇异吸引子”成了引人入胜的热门话题。研究者们，包括美国的威廉斯 (Robert F. Williams, 1927-)，首先对准了洛伦茨那个名气最大的天气模型。洛伦茨在他 1963 年的论文里附了一张像无穷大符号“∞”的图，看上去也像阿拉伯数字 8 夜间躺下睡觉的样子，右边只有两条曲线，而左边有五条，这是他的微分方程组的解作为“运动的点”在“相空间”的一部分轨迹，是 500 次相继计算的结果。这个图看上去也像蝴蝶的一对翅膀，这是否已经预测了他未来的“蝴蝶效应”这一说法？

实际上洛伦茨画出的只是茹厄勒和塔肯斯所发现的“奇异吸引子”的最初几根线条。虽然洛伦茨已经看到了比他图中画的更多的东西，但他仍对这个扑朔迷离的“一团麻线”难以想象。这个吸引子是稳定的和非周期的，它像螺旋线般的无穷多个环线永远不与自己相交，但在有限空间里宛如一只惊恐的小飞虫在两对蝴蝶翅膀之间随机地乱飞，忽上忽下、忽左忽右，行踪像魔鬼一样地飘忽不定。当茹厄勒十年后得知洛伦茨的工作提供了他自己理论的一个实际模型时，其惊讶和激动的表情是可想而知的。

虽然洛伦茨没有明确地定义混沌的精确意思，但作为继庞加莱之后第一个揭示自然界的不可预测现象的科学家，他被广泛地尊崇为“混沌之父”，获得了像日本“京都奖”这样的许多荣誉。他的那篇划时代论文，成了十年后点燃“李-约克混沌”概念思想火花的“火花塞”。

沿着气象学家洛伦茨的道路，一些使用非线性微分方程的工程学家继续在“混沌的家族”中添砖加瓦。加州大学伯克利校区电子工程与计算机科学系的菲律宾华裔教授蔡少棠(Leon Ong Chua, 1936-) 1983 年以他发明混沌的“蔡-电路”而一鸣惊人，而从 2010 年起接替他担任《国际分支与混沌杂志》主编的香港城市大学电子工程系讲座教授的陈关荣(1948-) 也以他 1999 年作为洛伦茨系统之“对偶物”的混沌“陈-系统”而享誉工程界。他也是国际上的“混沌控制”学说的早期开拓者之一和“混沌反控制”理论的创始人。2008 年以他为首的研究小组获得中国“国家自然科学奖”的二等奖。对经典的“三体问题”推广之后的“多体问题”有诸多贡献的美国数学家萨内(Donald G. Saari, 1940-) 2001 年甚至出版了名叫《混沌选举》的一本学术专著。（顺便提一句，他优秀的中国学生夏志宏(1962-) 在其 1988 年的博士论文中解决了关于“多体问题”的一个“百年猜想”。）

有趣的是，蔡少棠的大女儿蔡美儿（生于虎年，现为耶鲁大学法学院讲座教授）在 2010 年出版了一本回忆为母十八年的书《虎妈妈的战歌》，其中记载的对一双女儿苛刻要求的“十不准”原则引发了东西方“育儿经”孰是孰非讨论的“天下大乱”：赞美之、诅咒之、理解之、茫然之、笑纳之、悲泣之，不一而足。这本新作在读者大众中激起的混沌程度绝不亚于她已经“颐养天年“的老爸当年创造的混沌电路！

整个六十年代，关于混沌还有一点零星的其他发现，如法国的天文学家埃侬 (Michel Henon, 1931-) 研究了银河系的轨道，并以一类“埃侬映射”这一平面映到自身带两个参数的混沌变换留名。但是，只有眼光敏锐、思想深邃的数学家们试图从整体上来理解不规则行为的真正原因。这样的洞察好像让我们再次看到了中国大画家徐悲鸿 (1895-1953) 笔下的“骏马铁蹄”。

（五） 巴西海滩的“马蹄”

生于美国密西根州 Flint 市的斯蒂芬 ·斯梅尔 (Stephen Smale, 1930-) 是个有独特个性的数学家，这不光体现在他的数学研究上，也在于他独立思考的政治态度。1966 年夏天的 8 月，中国的文化大革命正在如火如荼之时，毛主席在天安门广场的城楼上接见激动得热泪盈眶的百万红卫兵小将，而此时的斯梅尔达到他个人学术生涯荣誉的最高峰：抵达莫斯科的有 5000 人参加的国际数学家大会领取菲尔兹奖。加拿大数学家菲尔兹(John Charles Fields, 1863-1932) 去世前捐出 47000 美金建立了这个“数学的诺贝尔奖”，每四年全世界 40 岁以下的数学家只有二到四人获此殊荣，比得诺贝尔奖还难。

在国内，意气风发、精力充沛的斯梅尔就是一位“反越战英雄”。美国国会恰巧在他获菲尔兹奖的当天正在举行听证会，调查他和鲁宾 (Jerry Rubin, 1938-) 1965 年在他任教的加州大学伯克利校区建立从事反战抗议活动的“反动”组织“越南日委员会”并担任共同主席的这件事。国际数学家大会快要结束之际，在莫斯科大学的宽阔台阶上，年轻时曾经“左倾”的斯梅尔应一位北越记者的邀请举行了记者招待会。他以谴责他自己的国家对越南的武装干涉开始，这让招待会在场的主人、冷战时期的苏联人大喜过望。

突然间，他话锋一转，进而谴责苏联入侵匈牙利以及国内缺乏政治、言论和出版自由，这让刚刚高兴的主人尴尬不止。由于公开得罪了超级大国的政府，他立刻被请入汽车，在公众视野里消失了几小时，但仍受苏联官方礼遇，未有太大麻烦，可能是受惠于手中的菲尔兹奖章。还未回到美国，国家自然科学基金会主任就毫不留情地马上扣下了资助他研究的两个月夏季薪水

的第二张支票，并指控他一大堆“经济问题”，如“滥用政府资助，整夏欧洲旅游”。所谓“欲加之罪，何患无辞”。第二年当他继续申请自然科学基金会资助时，某些让基金会领导害怕的美国国会议员还不想“放他一马”，百般刁难。生性倔强的斯梅尔毫不妥协，在校方及数学家同仁的支持下最后以胜利告终。这真是极具讽刺意义的故事：批评过苏联缺乏言论自由的斯梅尔在标榜“自由、民主、平等”的祖国也饱吃了一餐“言论自由”的苦果。

斯梅尔出生在一个美国的共产党员之家，青年时代的他也加入过这个组织。这并不奇怪。在那时代，熬过三十年代大萧条的美国人有许多对共产主义的想法发生了兴趣，对苏维埃的制度向往。当代美国有数学家布劳德三兄弟(Felix Browder, 1927-, William Browder, 1934-, Andrew Browder)，前两位都曾当过美国数学学会的会长。 他们的父亲老布劳德 (Earl Browder, 1891-1973) 担任过十六年美国共产党的主席 (1929-1945)，直至被他的“同志们”赶下了台。奥本海默年轻时也在共产党组织的边界上徘徊过，他后来自杀的美丽未婚妻以及他的弟弟都是共产党员。美国一本书中说得颇为幽默:“If you don’t believe in communism when you are 20, you don’t have heart. When you are 40, if you still believe in communism, you don’t have brain.”

斯梅尔在家乡仅有一间教室的一所乡村简陋学校读到八年级，以全班第三名的成绩高中毕业，没有显现任何天才迹象，但被视为一个孤独者和象棋高手。不像匈牙利的冯 · 诺依曼或美国的费恩曼，中学时代的他不太是一个“算得快”的少年，可能像中国的传奇数学家陈景润(1933-1996)一样不太适合参与奥林匹克数学竞赛。他获得四年免学费奖学金在离家仅仅一步之遥的号称“美国大学之母”的密西根大学读本科，后来一直读到 1956 年，在年轻的教授、匈牙利人博特 (Raoul Bott, 1923-2005)门下获得他的博士学位。在密西根教书三十年后去了哈佛的一个斯洛伐克人，高大的杰出数学家博特在 1953 年开设了一门代数拓扑课，除了一大群旁听教师，只有三名本土的研究生注了册，其中的两人，斯梅尔和芒克斯 (James Raymond Munkres, 1930-)，都成了著名的拓扑学家，后者的教科书《拓扑学》一直是这个行当好评如潮的大学生标准教材。后来，博特却以调侃的口吻说过，第三位的研究生贝利 (James Berry)是“真正聪明的一个”，可惜他未完成学位。

除了大一算是好学生，斯梅尔本科期间后三年的成绩大都是“非 B 即 C”，甚至核物理课拿了个不体面的 F（不及格）。这一部分原因是他对敏感政治活动的投入，在麦卡锡(Joseph McCarthy, 1908-1957)主义“清算共产主义”方面不光与官方不配合，反而经常与校方对着干。幸运地被本系录取

为研究生后，他的平均成绩依然是 C, 直到 1953 年 6 月收到系主任一封措辞强烈的“最后通牒”信，威吓着要赶他走，这才真正用功起来。从此，政治向数学低头，马列主义让位于拓扑学。大器晚成的他真是个“浪子回头金不换”的最好正例，也是流行中国的口号“不让孩子输在起跑线上”的最好反例。后来的斯梅尔却以强有力的数学洞察力著称于世，例子之一就是他拿到博士之后在其学术生涯第一站的芝加哥大学教书首年，就与一般直觉相反地证明了数学意义上的“球体翻转”--他有生以来第一个世界级水平的结果。

斯梅尔最伟大的工作都和庞加莱创立的拓扑学和动力系统有关。拓扑学研究的是几何图形在像挤压、拉伸或扭曲这样的“连续变形”下仍然保持不变的那些性质。在欧几里得(Euclid, 前 330-前 275)的几何里，圆和椭圆是两样完全不同的东西，但在拓扑学里它们却被看成是一模一样的东西，因为一个圆铁圈一被挤压就变成一个椭圆圈。但是，一位少妇手腕上戴的玉镯表面和她儿子玩的皮球表面不光在欧几里得几何里不一样，在拓扑学里也不一样。学过拓扑学的学生都会津津有味地谈论为什么每个人头顶上都有一个旋窝，不长头发，他们也知道为什么地球上不可能每个地方都同时刮“不管是西北风还是东南风”。

像斯梅尔这样的拓扑学家们考虑一个几何物体是否连通、是否有洞、是否打结。他们研究比我们的眼睛可以看到的一维曲线或二维曲面更为一般的“拓扑流形”。斯梅尔获得菲尔兹奖的成就是证明了对于维数大于四的“广义庞加莱猜想”，即 1904 年庞加莱提出的关于一类三维流形是否能与三维球面“拓扑等同”的著名猜想在四维以上的情形。四维的广义庞加莱猜想 1982 年被美国人佛雷德曼 (Michael Freedman, 1951-) 解决，并获菲尔兹奖。庞加莱猜想最终被俄罗斯数学天才佩洛尔曼(Grigori Parelman, 1966-)“临门一脚”攻破，但他不光拒绝了随之而来的菲尔兹奖，而且拒绝接收由美国波士顿的成功商人兼数学爱好者克莱(Landon T. Clay)夫妇 1998 年设立的克莱数学研究所为全球公开悬赏求解庞加莱猜想而设立的一百万美元的奖金。

当斯梅尔摘取了庞加莱之树的第一个果实并奠定了他在本领域中的大师地位后，他“挥泪告别拓扑学”，踏进了动力系统的新疆场。奇怪得很，庞加莱这个取名为“动力系统”的小儿子在他死后五十年间没有他另一个儿子“拓扑学”那么风光，研究者寥寥无几，尤其是与微分方程有关的“微分动力系统”。历史是如此的巧合，几乎是同时，当洛伦茨在北美洲东海岸的美国麻省理工学院摆弄着他的天气模型时，斯梅尔在南美洲巴西里约热内卢的纯粹与应用数学研究所和临近的 Copacabana 海滩上发明了他的“马蹄”。

斯梅尔首先考虑的问题与动力系统的“结构稳定性”有关。低维系统的结构稳定性概念源于三十年代以柯尔莫果洛夫 (Andrey N. Kolmogorov, 1903-1987) 为首的苏联学派。1961 年被美国哥伦比亚大学高薪挖去当正教授前，刚刚三十出头的斯梅尔在莫斯科见到比他更为年轻的四位崭露头角的数学家阿诺索夫 (Dmitri V. Anosov, 1936-)、阿诺德 (Vladimir I. Arnold, 1937-2010)、诺维科夫 (Sergei P. Novikov, 1938-)和西奈 (Yakov G. Sinai, 1935-) ，令他刮目相看，并叹息一声“西方并无这种组合”。巴西数学家佩肖托 (Mauricio Peixoto, 1921-) 研究圆这个特殊的数学框架时用到结构稳定性，但他未能将他得到的有关结果推广到更一般的动力系统。斯梅尔 1958 年申请到国家自然科学基金会两年资助到普林斯顿高等研究院做“博士后”研究，认识了早一年去那里访问的佩肖托，并洞察到这一概念的巨大前景。

但是一开始，斯梅尔就给出了一个关于稳定性问题的错误猜测。其实，在研究家的探索过程中，这不奇怪。现在哈佛任教的卓越华人数学家丘成桐 (1949-) 因为证明极其难解的“卡拉比(Eugenio Calabi, 1923-)猜想”是对的，1982 年荣获菲尔兹奖，但是一开始他差点儿“证出”卡拉比猜想是错的。

生活中到处都有关于稳定性的问题。站在高山之巅上欢呼的人要特别地小心，因为稍有不慎就会坠入深渊。但是年轻的父母不必担心放在圆锥形摇篮内的婴儿会掉下来。前一个情形的平衡状态是“不稳定”的，因为一个小小的扰动就回不了原先的平衡位置，而后一种情形的平衡状态却是“稳定”的，因为任何一个小扰动不会妨碍又回到原先的平衡位置。

上述的“稳定”或“不稳定”是关于一个固定系统的一个平衡点而言，因而称之为“平衡点的稳定性”，这是一个局部性的稳定性问题。斯梅尔关心的是一种全局性的稳定性问题，即当动力系统本身稍微改变一点时，系统的解是否有本质性的变化。这就是系统的“结构稳定性问题”。

如果原为圆锥形的山顶削成四面体形锥体，站在上面还是一样危险。同样，如果把圆锥形摇篮做成更为美观的半圆形摇篮，婴儿照样安全。所以，这些系统的小小改变并没有改变平衡点的性质，系统是“结构稳定的”。

有“结构不稳定”的例子吗？会画指数函数图像的人就有一例。中国的高中生都知道每一个以大于 1 的数a为底的指数函数$y = a^x$的曲线都经过y−轴上半部和原点相距为 1 的那个点。它向上弯曲（向下凸）并且递增，底越大，递增越快，曲线越陡峭，底越靠近 1，递增越慢，曲线越平坦。当底为某一个特别的常数时，更确切地说，为e (约为 2.71828)的e分之一次方这个在

1.445 附近的常数时，这条曲线恰好与xy−轴的对角线 $y = x$相切于(e, e) 这个点，并站在对角线的上方。这就保证了这个特别的指数函数有，并且只有一个“不动点”（刚好为e）。只要底比这个常数小，对应的曲线和对角线相交于两点，就是说该函数有两个“不动点”，而底大于这个常数的曲线再也不碰到对角线了，这时的函数就没有任何“不动点”。没有学过高中代数的人可以想象一根竖着的朝上开口的抛物线铅丝向上“穿过”一根挂衣服的水平绳线时的情形：先有两个截点，然后是一个切点，最后没有交点。

上面一段落的“千言万语”汇成一句话：底为$e^{1/e}$的指数函数这个“系统”是“结构不稳定”的，因为底的变大或变小改变了不动点的数目。实际上，连不动点的性质也起了变化。懂得初等微积分并喜欢读读“课外书籍”的大学生可以打开《美国数学月刊》的姐妹期刊《高校数学杂志》(The College Mathematics Journal) 2009 年 11 月的那一期，翻到一篇名叫“指数函数的动力学”的文章，其第二、三页上就有你想要看到的图形和分析。

斯梅尔考虑的描述微分动力系统的微分方程，带有可以取不同值的某些参数。例如，对于洛伦茨研究的热对流天气模型，流体的粘性指数就是一个参数。参数的大变化当然导致系统的解的大变化。自然地，人们都希望，小小的参数变化只会导致系统的解的微小变化，并且不改变解的主要性质，也就是说，系统是结构稳定的。

斯梅尔最开始的错误猜测大意是：具有不规则解的微分方程（即后来所称的混沌系统）不可能是结构稳定的。他定义了一类结构稳定的微分方程，后来被大家称为“莫尔斯 (Marston Morse, 1892-1977)−斯梅尔型”的，并宣称任何一个混沌系统都可用这类方程中的一个来任意逼近。学过大学矩阵理论的人可以这样来类比：具有固定行数和同等列数的所有的“非奇异矩阵”都可被看成是“结构稳定的”，而每一个“奇异矩阵”可被某个非奇异矩阵任意逼近。可惜的是，矩阵的这个性质在微分方程中的类似并不成立。

正当斯梅尔和他的太太在里约热内卢的临时公寓里被他们两个婴儿的尿布忙得不可开交时，1960 年元旦前寄来的一位数学同行的信让他大伤脑筋，就像十多年后年轻气盛的明日之星丘成桐公众宣称“卡拉比猜想”不对后不久，收到意大利出生的犹太人、美国宾夕法尼亚大学数学系讲座教授卡拉比本人寄来的“质疑信”那样令人苦恼。

这封信来自一位在维纳的熏陶下由电子工程硕士转变成的数学家、也曾是共产党员并在 1953 年在专门设立的调查共产党的国会非美委员会巨大压

力之下“反悔”的麻省理工学院教授莱温松 (Norman Levinson, 1912-1975)。他在信中描述了他于 1949 年发表的一篇论文中所考虑过的一个既是混沌的又是结构稳定的系统，小小的扰动并不让解的不规则性态消失掉。其实，这个“斯梅尔猜想”的反例是四十年前被一名荷兰工程师和物理学家范德波尔 (Balthasar van der Pol, 1889-1959) 研究过的刻画具有周期驱动电路的一个二阶非线性常微分方程。这个系统的解是不可预测的，但系统却实实在在是结构稳定的，和摇篮里的婴儿一样稳定得“固若金汤”。事实上，斯梅尔后来知道，洛伦茨将要研究的那三个微分方程解的不规则性在小扰动下也是保持不变的，但是他们当时并不认识对方，直到七十年代初约克把洛伦茨的论文寄给斯梅尔后，他才知道洛伦茨这个人及其工作。

得到莱温松这个重量级数学家的启发，受过拓扑学训练而导致几何思维发达的斯梅尔深思熟虑，一下子“豁然开朗”。在他 1998 年发表在美国大众数学杂志《数学信使》(Mathematical Intelligencer) 第二十期上的“混沌：在里约的海滩上发现马蹄”这篇文章里，他回忆道：

“无论如何我最后说服自己莱温松是对的，而我的猜想是错了。混沌已经隐含在卡特赖特与李特尔伍德 的分析之中！迷途已经解开，而我则作出错误的猜测。但是在这学习的过程中，我发现了马蹄！”

“少有翻版”的英国女数学家卡特赖特(Mary Lucy Cartwright, 1900-1998)和“屈指可数”的男分析学家李特尔伍德 (John E. Littlewood, 1885-1977)之间的“科学组合”是继后者与同是英国人、并为前者之博士导师的哈代 (Godfrey H. Hardy, 1877-1947)更早先的“强强联手”，在哈代 70 岁过世之后的“解析延拓”。他们对微分方程理论的精深研究，影响了几代这个领域的学者。

这个孕育在巴西海滩上的斯梅尔“骏马铁蹄”是怎样的东西？它又怎样踏进混沌的疆场？

我们在纸上画一个长方形，用 A、B、C、D 从左下角起顺时针来依次记它的四个顶点。我们设想把长方形横向拉长，同时纵向缩短，变成一个瘦长的长方形。这个过程有点像山西人做拉面，面条越拉越长、越拉越细。然后把它弯曲成一个马蹄形，使得长方形的左边出现在马蹄的上面顶端。马蹄对应的四顶点依次记为 A’、B’、C’、D’。下一步将马蹄放到原先的长方形上，它们相交成位于长方形内的两个有一定距离的平行的狭长长方形。

把这些操作复合成一步完成，就可以想象这定义了一个把长方形映到马蹄上的函数 h，它把长方形的每一个点映射到马蹄的一个点，例如，h 把 A 点映到 A’点， 不同的点映到不同的点，相近的两点映到相近的两点。反过来，马蹄的每一点都是长方形的某一点被 h 映来。这个函数是一个拓扑学家们经常挂在嘴上的“拓扑同胚”。

斯梅尔构造的这个“马蹄函数”不属于他以前提出的“莫尔斯-斯梅尔型”的。他证明它不光是混沌的，而且是结构稳定的。其混沌与庞加莱在求解“三体问题”时苦苦思索过的同宿点存在性有关。同宿点联系着系统在将来和过去的相反方向时间都趋向于同一个不动点这一平衡状态。在美国第一代数学家领袖之一莫尔 (Eliakim Hastings Moore, 1862-1932) 手中拿到芝加哥大学博士文凭的伯克霍夫沿着庞加莱的思路进一步证明在同宿点附近有无穷多个周期状态。但是他的工作在之后的几十年内只是在故纸堆里睡大觉，一直到斯梅尔在巴西的研究所里叫醒它。

斯梅尔还记得当时的情形：“我从检视纯粹与应用数学研究所图书馆内的伯克霍夫文集而知悉同宿点和庞加莱的工作。”

我们已经看到在马蹄函数作用一次后，原先的长方形中有一部分的点将留在长方形内，这些点事实上构成两个平行的瘦高长方形。运用想象力，可以感知如果连续作用马蹄函数两次，那些仍然留在长方形内的那些点将组成四个平行的更瘦削的长方形。作用三次，就有八个平行的细细的长方形，看上去像物理光学实验课上看到的黑白相间的光谱线，它们的点在迭代马蹄函数三次后还留在原先的长方形内。不断迭代下去，我们就会“看”到愈来愈细、愈来愈多的“光谱线”。山西手工拉面的行家可能更容易体会它：多次拉面的动作就会拉出越来越多、越来越细的面条。这个漂亮的“几何图像”让我们立刻想起一个人，一个由于受到大权在握、极其富有金钱的同胞数学家克罗内克 (Leopold Kronecker, 1823-1891) 全方位的“数学迫害”，前后三十年一连串精神失常并在疯人院度过一生最后时光的倒霉德国人--“集合论之父”康托尔(Georg Cantor, 1845-1918)。

十九世纪末期的 1883 年，康托尔构造了实数轴上的一个点集合。他把 0 到 1 之间的数区间 [0, 1] 这一线段分成三等份，然后把中间那个等份的线段去掉，但留下它的 1/3 和 2/3 这两个端点。在剩下的两个线段 [0, 1/3] 和 [2/3, 1] 中再去掉中间的三分之一。这样就剩下四个小线段：[0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1]。再去掉每一段中间的三分之一，如此重复做下去，直至无穷。这样构造的一个点集称为“康托尔三分集”，它包含所有被挖掉的线段的端

点和其他没被挖掉的点。事实上，这个康托尔集由不可数个点组成，但它本身不包含长度可以任意小的任何线段，无限地稀疏。

康托尔三分集的几何有个有趣的特色，这个称为“自相似性”的性质后来被“分形学”借了过去而大放异彩。如果我们只局限于看到三分集从 0 到 1/3 的这一段，一旦放大三倍，就会发现它的结构和原先的整个三分集一模一样。把 0 到 1/27 这一段放大 27 倍也是一回事。其实，三分集的任一小段放在放大镜下看都和整个三分集完全相同，就像小皮球放大一亿倍后看上去是个大月亮。这个数 3 就是康托尔集自相似性的“放大因子”。

康托尔的这个集合虽然出现在数学系本科生所修的课程《实变函数论》的教科书中，但跟他的其他伟大发现相比简直是“小巫见大巫”，只是他创造的震撼数学界的“集合论”大餐中的“一碟小菜”而已。故贝尔在他的大作《数学伟人传》中最后一章“失乐园？康托尔”谈到他的数学时就根本没提及到它。康托尔集除了在《实变函数论》中偶尔露个面，被关在集合论的象牙塔里几乎一百年，和美不胜收的自然界“老死不相往来”。

斯梅尔的马蹄动力学就这样和康托尔三分集联姻起来。将伯克霍夫早先的想法再向前推进，斯梅尔证明了他的马蹄函数同宿点的存在以及由此产生的迭代过程最终性态对初始状态的敏感依赖性，而这就是混沌的本质。几年后，他那里程碑式的有名长篇综合报告“微分动力系统”也在 1967 年被《美国数学会通报》(Bulletin of the American Mathematical Society)发表，马上被这个领域的建筑师们欢呼为一座“标志性大厦”

当数学家斯梅尔在他的微分动力系统开创性研究中大玩“高深数学”而大显身手的时候，他大概对一般只用到一点点“低级数学”的生物学“不屑一顾”。然而，就在这时，普林斯顿大学的一位动物学教授斩钉截铁地向世界宣告：简单的数学模型也可能复杂得令人乍舌。

（六） 莫名其妙的人口涨落

十八世纪末的 1798 年，西方的英国有位名叫马尔萨斯 (Thomas Robert Malthus, 1766-1834) 的经济学家出版了一本书《人口论》，忧心忡忡地提出了他的“人口理论”：人类赖以生存的生活资料是以算术级数增长的，然而人类自己却是以几何级数增长的。如果n代表未来的年数，前者的增长像n^2，后者的像 2^n。当 n 为 20 时， 20^2 仅为 400，但 2^{20} 已经超过一百万。马尔萨斯解决人口过剩的简单而冷酷的办法是：战争。

一百六十年后，东方的中国也有一位姓马的经济学家。他的全名是马寅初(1882-1982)，早年拿过美国哥伦比亚大学的博士学位，时任北京大学的校长。1957 年，他在《新人口论》中也忧心忡忡地担心中国的人口如不注意节制，就增长太快了。他的担心是对的，但是相信“人多力量大”的最高领导认为他杞人忧天，不是另一个姓马的“共产主义之父”马克思的信徒。虽然他多年失去话语权，但每天洗冷水浴的他比活了 99 岁的贝特还多活一年。

“人口动力学”这个学科并不一定要研究人，尽管研究人口很重要。中国人宋健 (1931-) 的“人口控制论”研究就在国际上有口皆碑。人口动力学更正式的名字叫“生态学”，英文术语是 Ecology，研究的是生物种群数目的涨落、生命的盛衰。曾为英国“首席科学家”的罗伯特 · 梅 (Robert M. May, 1936-) 男爵就是在生态学领域里发现了混沌现象的一位生态学家。

梅和乌拉姆一样，生于律师之家，但不是犹太人。他 1959 年在祖国澳大利亚的悉尼大学获得理论物理学博士学位，然后去了哈佛做了两年“博士后”，研究应用数学。回到母校做到理论物理正教授之后，他“心血来潮”地对生物学着了迷，1971 年他到普林斯顿高等研究院呆了一年，不干别的，专找普林斯顿大学的生物学家“聊天”。1973 年，硕果累累的他就成为普林斯顿大学的动物学讲座教授。

当年马尔萨斯的人口无限制增长模型太过粗糙了，因为它只用到线性函数。在食品无限充足的最理想情况下，如果一个种群的数目每年按某个增长率增加，那么种群下一年的数目为一个大于 1 的参数 r 乘上当年的数目，即迭代的函数为线性函数 $f(x) = r x$。这样的话，种群个数最终趋向无穷大，就像放在银行的存款永远不拿那样。然而，任何生命体有生，也有死，有复杂的生存环境，如天敌的存在。非洲狮子的数目不可能无限制增加，因没有足够多的斑马供它们享用，同样，斑马也不会太多，因为狮子总想吃它们。

这样，种群的数目必定随时间有升有降。要得到更反映现实的模型，生态学家合理地假设：种群数小时上升很快，数目适中时增长速度为零，而在数大时急剧下降。如果我们用 0 表示绝种，用 1 表示可设想的最大种群数，那么“相对种群数” x 由 0 与 1 之间的一个数来表示。满足上述自然要求的最简单的“相对种群数”函数是拿原先的线性函数 r x 乘上因子$(1 - x)$，得到的函数是一个二次多项式 $f(x) = r x (1 - x)$，其中参数 r 代表着种群的增长率。当 x 上涨时，$1 - x$ 下跌，它们的乘积就会制约种群数目的变化。

这个最简单的二次模型称为“逻辑斯蒂模型”。它的函数图像是开口向下的抛物线。当 x 从 0 上升到 1/2 时，函数也跟着上升，但当 x 从 1/2 继续上升到 1 时，函数却随之下降。这恰恰反映了种群数目的涨落规律。

这个函数的计算看上去连初中生都会难不倒，但在梅对它发生极大兴趣之前，没有人想到它的迭代点走向会复杂得如此令人眼花缭乱。后来的发展跟生态学家以前“种群数以相当规则的周期性在某个平衡点附近上下浮动”这个在大众眼里也说得过去的传统观念相悖。

梅开始了这样的迭代，并逐步增加参数值 r。 他发现，当 r 不超过 3 这个数时，一切都很正常。比如说，如果参数 r 小于 1，那么无论起先有多少种群数，最迟第二年以后它的数目就逐步减少，最终走向消亡。但当 r 在 1 和 3 之间时，最后的种群数会逐渐稳定下来到某一个固定数，而全然不管开始的种群有多少。这个固定数随着参数增加而增加，在图像中表示为一条上升的曲线。举例来说，当参数为 2.7，最终的种群数固定在 0.6296，而参数在 3 时，终极种群数增加到 0.6667。

他继续加大参数的值。当 r 比 3 大得不多时，直到大约 3.45 的时候，他发现了新的现象：固定数曲线像《西游记》中猪八戒的钉耙一分为二。种群数不再最终趋向于一个固定的值，而是按年份交替地先升后降（或者先降后升），最后在两个不同的固定数之间不停地来回跳动，而与最初的种群数无关。让参数值比 3.45 再大一点点，直到差不多 3.54 时，“钉耙头”的两端又各生一个新的小“钉耙”，即种群数每过四年有规则地涨落，最终在四个固定数之间周而复始地跳来跳去，而不管种群的初始数目有多大。这样一来，种群数的两年周期现象加倍成四年周期现象。

随着参数值一步步地提高，种群数目的周期数一次次地加倍。这种“倍周期分叉”现象既复杂得令人目瞪口呆，又美丽得令人目不暇接。这使我们想起古代中国的《周易》内的一列排比句：

“无极而太极，太极而俩仪，俩仪生四象，四象生八卦。”

这些分叉的参数值向前移动步伐越来越小，速度越来越快，周期数依次走过 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … ，突然参数值到达一个极限点，在这一点的参数值，其不错的一个逼近是3.57 这个数，周期现象戛然而止，种群数开始呈现一种像随机数一样无规律的涨落现象。

但当参数值继续向前走，稳定的周期又飘然而至，继续上升后，又冒出一个具有像三或七这样的奇数周期的“周期窗口”，在此窗口内，以周期三或周期七开始的倍周期分叉更快速地行进，然后再次中断而进入新的混沌。

这些都是在参数还未走到最大容许值 4 之前发生的怪事。当参数靠近 4 时，其迭代序列也变得愈加复杂。最后，参数为 4 时的种群数模型就是乌拉姆和冯 · 诺依曼研究过的那个函数，它复杂的动力学性态早已为人所知。

梅只看到参数由 3.45 变到 4 这整个图形的部分现象。这就足够了，“简单数学模型具有极其复杂动力学行为”的这一惊人发现足以让他在《科学》和《自然》这些顶尖学术期刊上让全世界的人看到自然界的新奥秘。关于这个最简单的非线性模型的大量数值实验将由纽约大学柯朗(Richard Courant, 1888-1972) 数学研究所的生物数学家霍本斯台特 (Frank Hoppensteadt, 1938-) 来完成。他选取了好几千个参数值，在计算机上画出迭代的参数变化分叉图像。他最后由此而拍成的电影充分显示了从分叉到混沌、从有序到无序不同瞬间的千变万化。霍本斯台特后来当过李天岩任教的密西根州立大学的理学院院长，还保持对研究的热爱。他八十年代在数学系放映了他的电影，让李天岩教授当时刚入学不久，还不懂混沌的中国大陆弟子们大开眼界。

梅和洛伦茨一样发现了在不同学科中出现的自然界混沌现象，但是依然困惑于数学上精确、贴切的解释。历史给了数学家极好的机会，在这些科学研究的背景下，混沌的数学概念在李天岩与约克的著名论文中横空出世。

（七）“周期三则乱七八糟”

1973 年 3 月的一个星期五下午，美国马里兰大学数学系的博士研究生李天岩来到他博士论文导师约克教授的办公室吐了一阵子“苦水”，到现在他还记得当时吐的是什么苦水，大概是什么“非少年维特”类型的烦恼吧。

约克完全没有理会他吐的苦水，却说，“I have a good idea for you!”

这个想法已在约克头脑中直观地凸现，但他未能予以证明。那时李天岩正在做微分方程方面的研究，以为他所谓的“good idea”是关于那个方面的“高深想法”。但是，他心中的那点不爽还在那里。

李天岩（稍有羞辱并半开玩笑地）：“Is your idea good enough for the Monthly?”

Monthly 指的就是美国几乎每个大学数学系都订阅的《美国数学月刊》这个一般大学生都能看得懂的浅近杂志。当李天岩从约克嘴里得知这个牵涉的语言非常基本的“idea”之后，马上感慨地说：

“It would be a perfect work for the Monthly!”

李天岩祖籍湖南，1945 年 6 月出生于福建省沙县。他的父亲李鼎勋早年留学日本东京帝国大学医学院，获得医学博士学位，1934 年回国任教湖南湘雅医学院，1939 年起任福建省省立医院院长。

李天岩曾经回忆道：“我父亲当初在湘雅医学院教书时，把小叔李震勋从家乡带出来到湘雅念书。可是小叔要‘革命’。父亲跟他说，你要革命可以，可是要把书念好了再‘革’。小叔还是跑到延安念‘抗大’。解放后，他做了第一任的大连医学院院长。1958 年反右，他就下台了。1968 年文革时，再抓出来斗一斗就斗死掉了。我们在台湾知道了这事，都不胜唏嘘。”

李天岩三岁时，国民党在大陆大势已去，他的父亲也到了台湾，而他随母亲还滞留在上海。母亲家中及亲戚们劝她及孩子们不必逃了，定居下来再说。他们说这只是换朝代，几个月后就会平静下来了。可是父亲却坚持认为“绝非如此”，一定得离开，因为前景是不可预测的（这正是“混沌”的本质意义）。

李天岩母亲当时说：“我必须立即去台湾，因我丈夫在那里！”

多年后，当李天岩的学生丁玖(本文作者)，听到他亲口讲述的这段往事时，感慨万千。

丁玖对他说：“如果你母亲当初做了相反的决定，那你就是大陆‘文化大革命’中众多命运多桀的五类分子之子。”

是呀，如果历史改写，难以想象那个未来出了大名的“李约克”混沌的“姓”会是哪个“张三李四”。

李天岩与母亲感情极深。他 1969 年离家赴美后的几十年内从不中断地给常年住在台湾的母亲寄信，一写一整页，直到她 2007 年以 89 高龄去世。有一天，他问丁玖：

“你多长时间给你母亲写一次信？”

“大约一个月一封，基本是双方收到信就很快回信。”他的学生不无自豪地答道，因为深知“烽火连三月，家书抵万金”的他相信二十年如一日坚持写家信给远在家乡扬州、“桃李满天下”的父亲丁一平和母亲王柳风，在大陆留学生当中也不会多见吧，因为打越洋电话既方便又便宜。

“我每周写一封。”

“那怎么可能？你妈妈还没有收到你的信呢。”

“一星期写一封反而好写多了，什么鸡毛蒜皮的事都可以写。若是半年写一封还真不知写什么好。”

李天岩在台湾读书直至大学毕业，1968 年为新竹清华大学数学系第一届毕业生，成绩名列前茅，踢过足球，也当过大学篮球队队长，是个全面发展的好学生。在按规定服役军队一年后，他赴美国马里兰大学数学系攻读博士学位。不久就通过博士资格考试，跟随约克教授做博士论文。

李天岩曾听约克说过他当年在哥伦比亚大学读本科时，“没有 B”。在中国式教育环境中长大的李天岩以为他“全是 A”。

约克却说：“全是 C 或 C 以下。”

看来约克和斯梅尔大学读书时差不多一样“差”，或许“更差”点。这令人想起 1976 年诺贝尔物理奖获得者、祖籍山东日照的麻省理工学院实验物理学家丁肇中 (1936-) 曾经说过的一句“俏皮话”：“我没有听说过哪一个诺贝尔奖获得者曾经是班上的第一名，倒是听说过是班上的倒数第一。”

2005 年 5 月在李天岩的母校台湾新竹清华大学主办的庆祝他六十周岁生日的“数值分析与动力系统国际研讨会”上，约克承认当初上大学时是“有一、两个 B”。“大概是体育课之类的，”他笑眯眯地对他昔日徒弟说。

詹姆斯 · 约克 (1941-) 这个纯粹的美国教授一生致力于数学与科学的联姻，他对上世纪上半叶领头的英国数学家哈代在其著名的随笔《一个数学家的自白》(A Mathematician’s Apology) 中以“无用”作为“美学标志”并引为自豪的纯粹数学家“象牙塔”式研究颇不以为然。1963 年本科一毕业，他就直奔马里兰大学读数学博士，只因那里有一个流体力学与应用数学研究所这一巨大的“非奇异吸引子”。倘若过去一百年来世界上最伟大的两名数学家庞加莱和希尔伯特 (David Hilbert, 1862-1943) 都在马里兰大学教书，约克会

毫不犹豫地选择庞加莱作为他的博士论文导师的，因他在言行上与前者那个法国人更为合拍，而至少在哲学上不太欣赏后者那个东普鲁士人更重视公理化、形式化的数学思想。

1972 年，马里兰大学气象学教授费勒 (Allen Feller) 将洛伦茨关于气象预测模型的那四篇在气象学家眼里理论性太强、数学味太浓的论文递给了同在流体力学与应用数学研究所的数学系约克教授，认为数学家们也许会感一点兴趣。多亏了费勒的“引见”，约克和他的博士研究生李天岩才能接触到洛伦茨发表在气象期刊上的论文。他们的确对此“甚感兴趣”，约克甚至将那篇最重要的一文“确定性的非周期流”复印一份，在首页贴上了自己的名字和地址，寄给了远在加州大学伯克利校区的斯梅尔。后者惊奇地读到一位气象学家十年前就发现了自己一度认为数学上不大可能的一类混沌现象，接着他也复制了许多份给别人看看。因为约克的大名也被复印上了，这就是为何坊间曾经流传过“约克‘发现了’洛伦茨”这一说法。

约克从洛伦茨试图求解的那三个微分方程的解对长远时间的“不可预测性”，提炼成一个关于函数迭代最终性态的问题。他猜测，一个连续函数只要有一个周期为三的点，这个函数的迭代就大有玩头。所以，他要他的得意弟子试试能不能证明他的判断。

什么是“周期为三的点？”一个过程如果连续使用三次，又回到初始状态，这就是周期三现象。比如三个小朋友玩皮球。甲把球抛给乙，乙将球抛给丙，而丙又把球抛给了甲。这就完成了一个周期三循环。

中学生都知道什么叫函数。对于一个给定的函数 f，如果存在三个互不相等的数 a，b，c，使得函数 f 在 a 的值为 b，在 b 的值为 c，在 c 的值为 a，那么我们就说函数 f 有一个周期为三的点，并有一个周期三轨道｛a，b，c｝。比如，让我们观察下面这个函数 f(x)：

当 x 大于或等于 0 并且小于或等于 1/2 时函数值为 2 乘上 x，而当 x 大于或等于 1/2 并且小于或等于 1 时函数值为 2 乘上 1 减去 x。

这个“逐片线性函数”的函数图像就像第二次世界大战时，英国首相丘吉尔(Winston Churchill, 1874-1965) 把他粗壮的食指和中指分开形成的那著名的英文单词“Victory”（胜利）大写第一个字母“V”，但是把它上下颠倒一下。它看上去又像远方的帐篷或我们头上戴的帽子，故想象力丰富的数学家们把这个函数也称之为“帐篷函数”或“帽子函数”。每一个人都能够算

出函数值当 x 等于 2/7 时为 4/7，当 x 等于 4/7 时为 6/7，当 x 等于 6/7 时又回到 2/7。这个最简单的非线性函数的确有周期为三的点。

稍微复杂一点的具有周期三点的例子是乌拉姆和冯 · 诺依曼研究过的那个抛物线函数$f(x) = 4x(1-x)$。喜欢动手算算的人可以验证，f 把$\sin^2(2/7)$ 映到$\sin^2(4/7)$，把 $\sin^2(4/7)$ 映到$\sin^2(6/7)$，把$\sin^2(6/7)$ 映回到$\sin^2(2/7)$。

两个星期之后，运用他得心应手的微积分技巧，李天岩完全证明了约克的想法真的是一个“good idea”。具体地说，巧妙不断地运用初等微积分中的“中间值定理”，李天岩证明了这个后来出了大名的

李–约克定理：如果一个连续的函数有一个周期为三的点，那么对任意一个正整数 n，这个函数有一个周期为 n 的点，即从该点起迭代函数 n 次后又第一次返回到这个点。更进一步，对于“不可数”个初始点，函数从这些点出发的“迭代点序列”既不是周期的，又不趋向于一个周期轨道，它们的最终走向将是杂乱无章的，无啥规律可循。

什么是“不可数”？一群对象，如果它们的“个数”比所有的自然数的“个数”还来得多，同时又至少和所有的无理数一样多，那么我们就说这群对象的个数“不可数”。所有的实数，即把所有的分数和所有的无理数放在一起，是不可数的。同样地，任意两个不同实数之间的所有实数也是不可数的。李天岩和约克的伟大发现是只要有“周期三”出现，就有数也数不清的初始点的“混沌轨道”出现，这些轨道的未来走向是“不可预测的”。

李天岩解释说：“理工科的大学生都学过‘中间值定理’。这个定理的几何意义十分显然：若用一条连续的曲线来连接位于一条直线一边的点 A 和另一边的点 B，那么这条曲线一定穿过这根直线。用这条直观上人人理解的定理我们能进一步证明，如果一个连续函数把一个区间映成包含该区间的一个更大的区间，那么区间里一定有一个点，它在这个函数的作用下不会变。也就是说，这个点是这个函数的一个‘不动点’。这是整个定理证明的基本思想，大学生们都能看得懂。”

当文章写好后，尽管李天岩心里想到的是投给令人尊敬的高等专门杂志，但约克却有他自己的想法。正如英国“当代的爱因斯坦”霍金 (Stephen W. Hawking, 1942-) 的畅销书《时间简史》的责任编辑所云：“书中多一个公式，就会少一半读者。”同理，越是高深专门的杂志，读者越是稀少。约克决定要让天下的人都知道他的“好想法”。

这样，按照约克的意图，他们把这篇题目直截了当的论文“周期三意味着混沌”寄给了具有大量读者的《美国数学月刊》，文章列出的所有“参考文献”只有洛伦茨的那四篇论文。但投稿后不久，文章就被编辑退回，理由很简单：该文过于研究性，不太适合此期刊所重点面向的大学生读者群。编辑建议作者把原稿转寄其他的杂志，但又加了一句话，若他们能把文章改写到一般学生都能看懂的地步，可以再投回《月刊》考虑。

但是，李天岩太忙了。他正在做微分方程等方面的博士论文研究，又对数值实现荷兰大数学家布劳威尔 (Luitzen E. Jan Brouwer, 1881-1966) 名闻天下的“不动点定理”有了特大的兴趣，埋头苦干地开辟计算数学非线性方程组数值解另一片崭新的土地。他既没功夫改这篇文章，也不知道怎么改它。于是乎，这篇文章就在他桌上被束之高阁了将近一年。

天赐的良机到了。1974 年是马里兰大学数学系生物数学的“特殊年”。在这一年里，每星期都要请“生物数学”这个领域里最杰出的学者来系里演讲。在五月份的第一个星期，他们请来了普林斯顿大学的梅教授演讲一周。在其最后一天的报告中，梅讲了令他着迷的种群生物学中那个带参数简单二次模型的迭代：当参数从小到大变化时其迭代点序列之性态将变得愈来愈复杂。他十分困惑于对这一现象的合理解释，想象中也许只是计算上的什么误差所造成的吧。约克听完梅的讲演后，在把他送去飞机场的时候，把李天岩桌上躺了将近一年的那篇关于李-约克定理的文章给他看。梅看到了文章的结果之后，极为吃惊，并认定此定理大大地解释了他的疑问。

约克从机场回来后立即跑到李天岩的办公室。

约克喊道：“我们应该马上改写这篇文章。”

文章在两个星期内改写完毕，三个月后被《美国数学月刊》接受，并刊登在 1975 年 12 月份的那一期上。

现今世界上稍微了解一点混沌学的人，无人不知李天岩与约克这篇篇幅不长、令他们一举成名的论文。该文不光证明了现已众所皆知的“李-约克混沌定理”，并且第一次在数学上严格地引入了“混沌”的定义，因而首创了“混沌”这一数学名词。它承上启下、推陈出新，开拓了整个数学界、科学界对混沌动力系统理论和应用研究的新纪元。

梅教授那年夏天到欧洲到处演讲，也让“周期三意味着混沌”的作者名扬天下，后来约克也被邀请到处讲他们的“混沌”。几年后的某一天，在东

柏林一个国际会议上做完报告后，约克和同行去逛市容。在一条游艇上，一个从未谋面、不期而至的苏联人突然走近了他，急于想与他交谈。在一位既懂英文、又通俄文的波兰朋友的帮助之下，约克才听懂对方这位名叫沙可夫斯基 (Oleksandr M. Sharkovsky, 1936-) 的乌克兰数学教授比他早十来年就证明了较李-约克定理第一部分似乎更为一般的结果，并发表在西方人几乎看不到的《乌克兰数学杂志》1964 年第 16 期上。相识四个月以后，约克收到了沙可夫斯基寄来的他那篇论文。

冷战时期，苏联一些数学家，尤其是那位不时挖苦一部分西方数学家、2010 年在法国因病突然去世的俄罗斯“首席数学家”、20 岁不到就因证明“任意一个多变量的连续函数都可以由有限多个两个自变量的函数构造出来”而解决了希尔伯特在 1900 年国际数学家大会上提出的第十三个“世纪问题”、1965 年就和他的老师、上世纪全世界最伟大的数学家之一柯尔莫果洛夫同获苏联最高荣誉“列宁奖”的阿诺德，生前有时冷嘲热讽地说道：

“你们美国人搞的东西，我们苏联人早就搞过了。”

这话有时部分地不假，沙可夫斯基定理便是一例。在这篇“线段连续自映射周期之共存性”的论文中，沙可夫斯基硬是把连小学生都熟知的自然数的“自然顺序”1, 2, 3, 4, 5, … 打乱重来，按如下的新方式排成一列：

$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21, \ldots,$ 即除 1 以外的所有奇数

$2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 2\cdot 7,\ 2\cdot 9,\ 2\cdot 11,\ 2\cdot 13, \ldots,$ 即 2 乘上上一行的每一个数

$2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ 2^2\cdot 7,\ 2^2\cdot 9,\ 2^2\cdot 11, \ldots,$ 即 2 乘上上一行的每一个数

$2^3\cdot 3,\ 2^3\cdot 5,\ 2^3\cdot 7,\ 2^3\cdot 9,\ 2^3\cdot 11, \ldots,$ 即 2 乘上上一行的每一个数

……………………………………, 等等、等等

$\ldots,\ 2^7,\ 2^6,\ 2^5,\ 2^4,\ 2^3,\ 2^2,\ 2^1,\ 2^0$。 即由大到小排列 2 的所有次方

他严格地证明了他的现已广为人知的：

沙可夫斯基定理 如果一个连续的函数有一个周期为 m 的点，则对在上述次序中排在 m 后面的任意一个正整数 n，这个函数有一个周期为 n 的点。

因为自然数 3 在沙可夫斯基的排序中名列第一，即其余的自然数都排在它后头，所以如果在沙可夫斯基定理中让 m 为 3, 那么对任意一个正整数 n，这个函数有一个周期为 n 的点。哈哈，这就是李-约克定理的结论之一。因而后者只是前者的特例，或者，按照数学教科书的一般写法，李-约克定理之第一部分是沙可夫斯基定理的一个“推论”。

如果连续函数有一周期为九的点，那么由沙可夫斯基定理可知，除了可能没有周期为三、五、七的点，该函数有周期为任何其它数的点。这却不包括在李-约克定理之中，尽管李天岩和约克在他们的论文中给出一个连续函数的例子，它有周期为五的点而没有周期为三的点。

但是严格地说，李-约克定理中“周期三推出所有周期”并不能看成是沙可夫斯基定理的特例。事实上，李-约克定理的假设是：存在一个点 a，函数在该点连续迭代两次都变大，但第三次迭代的结果不大于 a，或函数在 a 连续迭代两次都变小，但第三次迭代的结果不小于 a。用不等式表示，就是

$$f^3(a) \leqslant a < f(a) < f^2(a) \quad 或 \quad f^3(a) \geqslant a > f(a) > f^2(a),$$

而“周期三点存在”的假定只是适合这些条件的一个特例。

李天岩评说道：“我们定理的更一般假设和沙可夫斯基的序列有一个很大的不同，可是这在应用上却有极大的差距。好比说在种群动力学上，种群的第一代和第二代都是在增长，但是在第三代却突然大降，于是乎什么‘鬼现象’都可能发生，但是第三代的种群数要降到和第一代一模一样（意指周期三点存在）恐怕不大可能。从这个角度来看，沙可夫斯基序列也许比较适合放在象牙塔里。”

由于沙可夫斯基定理关于周期点的结论看上去远较李-约克定理一般，在讲述函数迭代性质的“离散动力系统”这门学科的一些教科书里，作者干脆只介绍沙可夫斯基定理，而对李-约克定理只字不提。

尽管沙可夫斯基定理关于周期点的部分比李-约克定理更为一般，但只有李-约克定理特有之第二部分才深刻地揭示了混沌现象的本质特征：混沌函数的逐次迭代关于初始点的敏感依赖性，以及由此产生的迭代点序列最终走向的不可预测性。它向科学界给出了一个超乎于数学结果的信息：混沌无处不在，模拟自然系统的看似简单的非线性函数可能会展现极其复杂的动力学性质。根据统计，该文可能是数学界及物理学界被引述次数最多的当代重要论文之一，已经被引用了一千七百多次。

1985 年炎热的夏天，一身是病的传奇人物李天岩教授（他的故事可见《数学文化》杂志 2011 年第三期）第一次回到祖国大陆，整整两个月，他南抵广州中山大学、北至长春吉林大学，东到浙江杭州大学、西临西安交通大学，中达北京中国科学院理论物理研究所，马不停蹄地讲解“混沌”或其他学术专题。在其学术演讲中，李-约克原始论文的英文题目“Period Three Implies Chaos”被他形象地翻译成“周期三则乱七八糟”。

具有五千年文明历史的中华民族从古到今不乏像十八世纪德国智者康德 (Immanuel Kant, 1724-1804) 那样“仰望星空”的哲人。自从“周期三”被它的作者、被“混沌”的传播者们带进中国，神州大地的哲学爱好者们掀起了一股数字“三”的考据热。只要在“百度”网站上打入 “周期三与古代混沌思想的关系”、“周期三则乱七八糟”或者“混沌的哲学解释”诸如此类的关键词，就可看到“科学意义上的混沌”五花八门的中国式哲学解释：

老子(约前 571-前 471)：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”

庄子：“南海之帝为倏，北海之帝为忽，中央之帝为浑沌。”

王充(27-约 97)：“元气未分，浑沌为一。”（《论衡·谈天篇》）

在西方学术界，类似的哲学解释颇为罕见，也许是因为西方文明是在古希腊的演绎推理法的地基上竖起的“埃菲尔铁塔”。当然，古希腊的神秘主义者和“数学证明”的引入者毕达哥拉斯(Pythagoras, 约前 569-约前 500) 学派认为“万物皆（整）数”。他们把一称为“神圣数”、二“女性数”、三“男性数”、四“公正数”、五“婚姻数”，然后有代表着“友善”、“完美”、“丰富”、“自恋”等等的数，这样，数字被人性化了。

东方文明则更爱好归纳法和类比法。在汉语里，三和九都和“多”这个概念有关系，但前者表示的“多”少于后者。包含“三”的常见成语有“三思而行”、“三申五令”、“三人成虎”、“三教九流”、“一而再、再而三”、“三人行必有我师”，“三个臭皮匠，赛过诸葛亮”。但它们与“周期三”的隐含风马牛不相及。其实，“周期三意味着混沌”只是一个被严格证明的“不朽”的数学定理，并没有什么“一脉相承”的人文历史渊源或者“牵强附会”的哲学理由。如果“三”这个数字值得“大书特书”，“五”为什么不能呢？它毕竟是写不出解公式的一般代数方程式的最低次数。

事实上，从数学上来看，仅仅“周期一”或“周期二”点的存在并不引起一些“波澜壮阔”的事发生。比如，对于“恒同函数”$f(x) = x$ 来说，它的

每一个点 x 都是“不动点”，即周期为一的点，但这个函数没有任何周期为大于 1 的周期点，是一个完全“规矩”的函数。对于“变号函数”f(x) = -x，每一个数 x 被映到它的相反数 -x，所以，除了 0 这个周期为一的点以外，每一个非零数都是周期为二的点。因而变号函数没有任何周期为大于 2 的周期点，也是一个特别“规矩”的函数。这两个函数的共同特点是，他们分别为严格递增或严格递减的“单调函数”，前者自变量越大函数值越大，后者自变量越大函数值越小。但当函数有了周期为三的点，它必定是一个非线性的非单调函数，它的函数图像上可以有山峰，可以有山谷。就像古诗“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”描绘的那样，翻山而过，眼前一片姹紫山红、气象万千，一派“混沌”的满园春色出现了。

李-约克“混沌”定义的破土而出，不光让世人的焦点聚集在洛伦茨十年之前注意到的混沌天气微分方程以及近年来梅所考虑的混沌种群差分方程，更引发了物理、工程、甚至社会科学探索混沌动力系统的热潮。

但是，七十年代的中末期，另一场“革命”正从一个科学怪人的手指前端汩汩地流出，继而“飞流直下三千尺”，“不飞则已，一飞冲天”。

（八） 洛斯阿拉莫斯的“幽灵”

一百六十年前，马克思、恩格斯在《共产党宣言》中第一句开宗明义地描绘道：“一个幽灵，一个共产主义的幽灵，在欧洲徘徊。”1974 年，一个披着长发的“幽灵”，经常在洛斯阿拉莫斯深夜的街道上游荡。

七十年代的洛斯阿拉莫斯国家实验室，早已从三十年前奥本海默时代的战时紧张中和缓过来，尽管大部分科学家“像士兵从战壕撤退一样回到各自的大学教书”，但这个曾经一片荒凉的地方已成长为一个引诱年轻人的超级“吸引子”，也是拥有大型计算机最多的研究中心之一。由于乌拉姆等人的早期开创性工作奠定的基础，这里也建立了一个“非线性分析研究中心”。

洛斯阿拉莫斯理论部的新主任卡拉瑟斯 (Peter Carruthers, 1936-1997) 来自康奈尔大学，就像他的这个位置四十年代的前任贝特一样。1973 年到任后，他做的第一件事就是解雇了几位高级研究员，而代之以他精心挑选的新一代。当费根鲍姆(Mitchell J. Feigenbaum, 1944-) 第二年被他雇佣时，30 岁还差了几个月，已经戴了麻省理工学院基本粒子物理四年的博士帽子，分别在康奈尔大学和弗吉尼亚理工学院工作过。这位头发长长、不修边幅的地道的纽约城布鲁克林人，讲话时眼光急转、语速飞快、激情满射。从东部搬到西

部后，同事们只看到他与众不同地干活、漫步、思考，一天“二十五”个小时工作好像还嫌太少。

然而，到此为止他只发表过一篇论文。在论文数量决定一切的中国，大概前景黯淡，拿不到研究基金，津贴也大减。在美国研究型大学新科助理教授的“三年考察”报告中也会收到一个“警告”，下一个三年后试用期结束时很可能要“卷铺走人”。“不发表则灭亡”似乎是天经地义的大学游戏规则，今日更甚。但是，卡拉萨斯不是那种只看文章数量的上级领导，他清楚地知道，创造性研究不会是什么“计划”之后的产儿。他还清清楚楚地记得康奈尔的美国物理学教授威尔逊 (Kenneth G. Wilson, 1936-)，似乎也写不出什么论文，但无人敢说他缺乏对物理的洞察力。一旦他的思想开了花，论文就会像潮水般地汹涌而来。

威尔逊 1982 年获得诺贝尔奖的工作包括他和同为美国同胞的卡丹诺夫 (Leo P. Kadanoff, 1937-)以及英国物理学家、化学家兼数学家、现为约克同僚的费希尔 (Michael E. Fisher, 1931-) 关于相变问题的“重正化群”理论，他们研究物质在两种不同状态之间临界区域的奇妙性质，如流体的液态和气态，或金属的磁化和非磁化。这时的复杂现象必须用非线性的数学来描述，可从液体突然沸腾时在它和气体的界面上看到的一团乱象来想象。这三人在 1980 年共享了以色列总统颁发的沃尔夫 (Ricardo Wolf, 1887-1981) 物理奖。

六十年代卡丹诺夫处理“临界现象”的重正化基本想法是把原子间的相互联系用“尺度变换”来刻画，即把一些看上去不变的物理量，譬如质量，看成似乎随观测尺度而上下浮动，这和七十年代初法国人芒德勃罗关于英国海岸线长度的看法颇有异曲同工之处。但是，跨越尺度的变化并非任意，而是遵循某种“相似性”的规律，威尔逊的重大贡献在于运用不同尺度的“自相似性”而提供了计算可能性。

费根鲍姆被威尔逊的深刻思想迷住了，他要用自相似性的方法来对付湍流问题。湍流的特点之一就是自相似性：大涨落带有小涨落，大漩涡包含小漩涡。有序流体进入混沌状态产生湍流，吸烟者看到袅袅上升的烟柱破碎成乱七八糟的漩涡。但是混沌之中是否存在有序？这可是个大问题。

当吸烟不止的费根鲍姆站在快要进入瀑布区域、开始加速的溪流前，他凝神注视着急速前进、颤抖不已的水流，左右摇晃着自己的头颅：

“你可以注视着某种东西，一堆泡沫或别的什么。如果头动得特别快，你可以突然辨认出表面的整个结构，你可以从心中感觉到它。但是对任何有数学背景的人，当他看到这东西，或者仰望着累累浮云，或者在风暴中站在海堤上，他知道对于这一切实际上什么也不懂。”

费根鲍姆要当“科学的弄潮儿”，研究新科学。他有一种坚定不移的信念：迄今为止的物理科学未能理解困难的非线性数学。作为物理学家，虽然只有一篇发表在他名下的论文，但他有“粒子物理”、懂“量子场论”，他已经积累了不同领域丰富的知识，他已经掌握了最新出现的计算技术，厚积薄发、潜力无穷。正如后来他的上司对此评价：

“费根鲍姆具有正确的背景。他在正确的时候做正确的事，而且做得很出色。他不是做局部的事情，而把整个问题弄清楚了。”

作为第一步，费根鲍姆找到最简单的非线性函数，就从梅考虑过的那个描写种群数目变化的带参数二次函数开始了他的数值试验。他不知道洛伦茨的工作，但在 1975 年夏天科罗拉多州的一个会议上，他听了斯梅尔讲了同一个带参数函数的迭代从周期变到混沌的某些尚未解决的问题。斯梅尔敏锐的直觉让他感觉到有进一步探索的必要。

为此，费根鲍姆摆弄起了当时流行的 HP-65 型手用计算器，把数学分析和数值实验结合起来研究有序和混沌之间的桥梁。这个桥梁类似于流体中层流和紊流之间的通道。梅这样的生态学家已经看到随着参数变化的种群数目倍周期律，例如，在某一个分叉点只要稍稍改变一点点长江“中华鲟”的出生率，它们的数目变化规则就会从四年周期变到八年周期。费根鲍姆决定先算出这些分叉点参数的精确值。

慢腾腾的计算器好几分钟才能算出周期加倍的精确参数值，参数越往前走，计算就越费时。这反而帮了费根鲍姆的大忙。他可以从容不迫地把数据记下，在等待下一个结果时可以思索一番，甚至还有余暇猜猜下一个答案会在哪里。如果三十年后的他重新开始，用的是“克雷”超级计算机，说不定一些有趣的结果“稍纵即逝”，某个重要的模式“逃之夭夭”，他也许有可能什么也发现不了。在科学的探索上，“慢工出细货”也一点不假。

几个回合下来，费根鲍姆眼睛突然一亮，就好比是“哥伦布发现了新大陆”。这些分叉参数出现了某种规律性：它们似乎是几何序列般地向前进，即目前值和前一个值的差与下一个值和目前值的差之比值最终趋向一个固定

常数。倍周期的来临不光越来越快，而且以恒定的“加速度”越来越快。这种几何收敛的迹象暗示他，某种尚未人知的东西在不同的尺度上重复。

这个“收敛常数”在费根鲍姆计算器上最高精度为三位小数，他看到的是 4.669。这个奇怪的新数和那些数学上大名鼎鼎的绝对常数 π = 3.14159 … 或 e = 2.71828 … 等有亲戚关系吗？他找来找去，“家谱“上没发现什么。

过了两个月，他突然想起他的三个实验室同事：米特罗波利斯 (Nicholas C. Metropolis, 1915-1999)、保罗 · 斯坦 (Paul R. Stein)及迈伦 · 斯坦 (Myron L. Stein)。他们 1971 年研究过类似函数的迭代，并警告过他这些迭代“吓人的复杂性”，也曾经考察过其他带参数的函数，并发现它们共享某些模式。事实上，就是前一个斯坦过去曾经告诉过他，倍周期分支的现象不只发生在二次函数上，它也发生在带有参数的正弦函数 r sin (π x) 上。一个念头飞了出来，何不再瞧瞧这族正弦函数？说干就干，他又拿起 HP-66 计算器进行了新一轮倍周期计算。没想到，新的分叉值依然是几何收敛的，但不可思议的是，其不变的收敛速率还是那个数：4.669。

两个家谱相距甚远的函数族，一为三角函数，另一为二次多项式，一个是“超越的”，另一个是“代数的”，却有某种一致的规律性，导致了同样的结果。费根鲍姆激动得打电话给他父母，告诉他们他也许因此名满天下。接下来，他不辞劳苦、马不停蹄试验了他能想得到的其他带参数的函数，分叉点产生的几何常数无一例外地仍是同一个数：4.669。

费根鲍姆又打电话给保罗 · 斯坦报告这一消息，但后者持怀疑态度，毕竟只有三位小数的精度，谁知道第四位或到第八位是否都一样呢？洛斯阿拉莫斯有的是大型计算机，过去他像其他理论家一样不大看得起计算机的机械性运行，从未去学计算机语言。现在，为了证明谁更正确，费根鲍姆开始学编计算机 FORTRAN 程序。借助计算机的帮助，第一天对这些函数他就得到同一个有五位精度的常数：4.66920。当晚他又学会了怎样用“双精度”，第二天就得到如下的精度：4.66920160910，对所有试验过的函数都一样。

费根鲍姆发现了“普适性”。这个“放之四海而皆准”的普适常数是他强烈的“计算好奇心”催生的宠儿。计算，给了他发现自然界宝藏的极佳机会，带给他“阿里巴巴”的“芝麻开花”。难怪约克 2005 年 5 月在台湾新竹清华大学参加庆祝李天岩六十岁生日的国际研讨会之后，通过采访他的台湾数学界人士，对年轻一代的数学爱好者语重心长地说：

“研究就是去发现叫人赞叹的想法，动手计算则可能导致伟大发现。”

中国当今的计算数学权威之一石钟慈(1933-) 二十年前就认为:

“计算已成为一种基本的科学方法。它与从牛顿、伽利略以来发展起来的两种传统科学方法--理论和实验--形成鼎足而立之势，大大改变了现代科学技术的面貌。人们现在已把计算称为‘第三种科学方法’。”

费根鲍姆的工作并没有立刻得到“一呼百应”，没有像李-约克定理的深刻思想和严格证明一下子被人“全盘接受”。他由此写成的论文两年内被学术期刊频频拒绝，编辑们认为他的文章“不宜发表”。

在科学史上，出乎意料的独创性工作常遭厄运，权威们经常武断地判处一个新思想的死刑，直至它“死而复生”。贫病而逝的挪威人阿贝尔 (Niels Abel, 1802-1829)和决斗丧生的法国人伽罗瓦 (Evariste Galois, 1811-1832) 之高次代数方程、倒霉的匈牙利人鲍耶(Janos Bolyai, 1802-1860) 和幸运的俄罗斯人罗巴切夫斯基 (Nikolas Lobatchewsky, 1793-1856) 之非欧双曲几何，都是众所周知的例子。“日本吸引子”的发现者、日本京都大学电机系当时的研究生上田皖亮 (Yoshisuka Ueda) 1961 年 11 月 27 日在研究电子线路的非线性微分方程时发现了十分混乱的现象，却被自己的导师视为“不合常理”而痛失了“发现权”的良机，直到 1970 年才让他报告这一重要发现。正如李天岩 1988 年登在台湾通俗数学杂志《数学传播》上的一篇短文中所惋惜的那样：

“头彩已经被洛伦茨抢走了。”

数学家们对费根鲍姆也有些疑虑，原因之一是他并未提供一个严格的证明。1976 年 9 月当他在洛斯阿拉莫斯召开的一个国际数学会议上向听众介绍他的理论时，刚刚起讲，乌拉姆的“老乡”、知名的数学家卡茨 (Mark Kac, 1914-1984) 就站起来毫不客气地问：

“先生，您想给出数目字还是给出证明？”

费根鲍姆回应道：“比前者多点，比后者少点。”

卡茨再次诘问道：“是任何讲道理的人都称作证明的东西吗？”

做完报告之后，当费根鲍姆征求卡茨的评述时，带波兰口音的后者有点挖苦意味地拖着颤动的 r 音说：

“是的，这果然是一个讲道理的人的证明，细节可以留给 r-r-rigorous（严格的）数学家们。”

过后不久，一位大体上还算“比较严格的”数学家果然不负“卡茨”们的众望。1979 年，美国人兰福特 (Oscar E. Lanford III, 1940-) 给出了“费根鲍姆定理”用计算机扶助证明的细节，虽然这个“土法炼钢”法不见得那么严格。这个普适数对所有的带参数“单峰函数”都一样地成立。单峰函数，顾名思义，它们的函数图像看上去像单峰骆驼的驼峰。没有见过骆驼的人可以想象八十年代的日本电影《远山的呼唤》中那座山峰的轮廓。

当然，费根鲍姆的开创性工作很快就获得了绝大多数人的承认和赞赏。尤其是 1979 年当大家听说一名意大利物理学家和一名法国物理学家通过实验证实了倍周期分支的确是依照他所预测的那样发展，他一下子就大红大紫起来。他前几年的发现分别在 1978 年和 1979 年连续两年都发表在《统计物理杂志》上。在 1977 年召开的那个第一届混沌国际会议上，福特评述道：

“费根鲍姆看到了普适性，发现了怎样作尺度变换，并且给出了一条走向混沌的道路。它是直觉上诱人的。这是我们第一次有了一个人人都能理解的清楚模型。”

然而，一些科学家仍然认为对费根鲍姆的贡献估计太高，“虽然漂亮，但不及李−约克的工作那样影响深远”。最持否定态度的是“分形之父” 波努瓦 · 芒德勃罗 (Benoit Mandelbrojt, 1924-2010)。当成名之后的费根鲍姆 1984 年应邀向瑞典的诺贝尔讨论会发表演讲时，芒德勃罗发表了讲话，被听众们形容为一个“反费根鲍姆演说”。他不知从什么地方居然挖出一位名为麦堡 (P. J. Myrberg) 的芬兰数学家二十年前所写的一篇关于倍周期现象的论文，并挑寻式地一直把“费根鲍姆序列”另外叫做“麦堡序列”。

不管怎么说，正是芒德勃罗这个人在七十年代初发出的一个“地问”，开创了一门新的几何学，研究具有分数维数“点的集合”的几何学。

（九） “英国的海洋线有多长？”

1970 年，芒德勃罗的一篇文章大概会让自以为懂得几何、代数又好的读者觉得好笑。文章的题目是疑问式的：“英国的海洋线有多长？”

英国的海洋线有多长？富有个性的一位英国前辈、湍流研究的首创者理查德逊 (Lewis F. Richardson, 1881-1953)，曾对曲折的国境线好奇。他比较了

比利时、荷兰、西班牙和葡萄牙的百科全书，发现这些国家对共同边界长度的记载相差 20%。芒德勃罗在他的文章中得出结论：任何海岸线在某种意义上是无限长的。这真是与普通常识相悖。如果无限长，那为什么马拉松运动员能从海岸线一端跑到另一端？

我们知道怎样测量一条直线段的长。要测量一条海岸线的长，拿一只两脚规，把它张成某个单位的长度，比如一米。然后沿着海岸线一步一步地数数，最后的米数只是真实长度的一个近似，因为两脚规忽略了两脚之间的迂回曲折。如果把两脚规并拢一些，比如张成一尺长，再量一次，就会数到稍稍大一些的长度，这是因为原来每步一米量了一步的距离，现在每步一尺地量出来不止三步。再把两脚规的步长缩短到一寸，重新数步子，就会算出更大的长度。如果一只不厌其烦的小蚂蚁自告奋勇地担当两脚规的角色，翻过海岸线上的每一粒粗沙子，它会向我们报告一个还要大的长度。看上去，两脚规张得越窄，量得的长度就越大，但是常识告诉我们，它们会趋向于一个最终值，即海岸线的实际长度。

银行定期存款问题也有类似的说法。设想你有一笔财富 100000 元人民币存一年定期，年利息为 100%。如果到年底取回存款时才计算利息，你拿回家 200000 元，其中 100000 元是利息。如果聪明的你要求银行一个季度算一次利息，每季利滚利，到时你拿到的钱比 200000 元多一点点。如果银行更大方，答应一个月算一次利息，则你得到的更多。一天算一次利息，一年后连本带利还要多。如果银行“连续”地计算你的利息，连续地利滚利，不要以为你能获得无穷大的年终收益，但你一年之后能拿回最大可能的人民币数额 271828 元，即你的本金 100000 元乘上“自然对数”的底 e 这个常数。

如果海岸线是“足够规则”的，譬如是椭圆形的，那么上述“两脚规”测量的过程确实收敛到一个有限数。这就是从大学微积分里学到的怎样计算光滑曲线的长。但是，曼德波罗发现，当把“两脚规”的步距越调越小时，因为大海湾显露出越来越小的子海湾，犬牙交错、弯弯曲曲、参差不齐，所得的的海洋线长度无限地上升。

芒德勃罗是个“杂学家”，不像是常规意义下的科学家，但却是一个兴趣广泛的数学家。当多年后荣誉等身的他演讲前主持人介绍他“ …… 在哈佛教过经济学，在耶鲁教过工程学，在爱因斯坦医学院教过生理学 ……”的时候，他不无骄傲地对听众们说：

“当我听到过去从事过的一连串职业时，就经常怀疑自己是否存在。这些集合的交集肯定是空的。”

芒德勃罗出生于波兰首都华沙一个立陶宛犹太人的家庭，十二岁时他随父母定居法国巴黎，原因之一是他的数学家叔叔佐列姆 ·芒德勃罗(Szolem Mandelbrojt, 1899-1983) 在那里教书。老芒德勃罗和其它几个志同道合、才华横溢的年轻数学家，如后来坐上冯 · 诺依曼在普林斯顿的椅子的韦伊 (Andre Weil, 1906-1998) ，三十年代在因第一次世界大战而数学家断代的祖国建立了“布尔巴基”(Nicolas Bourbaki)这个影响了世界几十年的数学团体。它后来的积极参加者包括斯梅尔的“反越战盟友”、荣获 1950 年菲尔兹奖的施瓦茨 (Laurent Schwartz, 1915-2002)。这个组织杜撰的人名出现在他们集体写成的多卷本浩瀚巨著的作者签名处，其实曾是十九世纪具有希腊血统的一位面孔严肃的法国将军的真名。布尔巴基的成员对待数学也是“面孔严肃”的。他们和四十年代前还活着的英国理论数学巨匠哈代有着共鸣，但对已逝的本国同胞庞加莱比较反叛。他们从公理开始，以推理为准，要演绎出一切严格的定理。他们坚信，数学就是数学，不是物理，应当纯粹，无关应用。在他们眼里，几何直观永远是不可靠的，甚至是愚弄逻辑思维的罪魁祸首。

但是，老芒德勃罗可能影响了一部分世界，却未能够影响他侄子的数学世界观。芒德勃罗对布尔巴基的价值观是不能容忍的。二战后，他考取了庞加莱的母校巴黎高工和更为有名的“巴黎高师”。他开始时慕名上高师，但几天后便逃离了这个布尔巴基分子集中的法国最高学府，转入高工。十年过后，由于他无法在弥漫着布尔巴基形式主义空气的法国感到快乐，便离开了祖国，离开了祖国的学术界，去了美国 IBM 的沃森 (Thomas J. Watson, 1874-1956) 研究中心。但当他宣誓加入美国籍时，依然保留他的祖国籍。他后来获得了 IBM 的“院士”(Fellow) 荣誉称号，并任耶鲁大学的讲座教授。

芒德勃罗具有与生俱来的强大“几何直觉力”，终生热爱几何图形，并喜欢用几何的语言来解释或描绘吸引他眼球的任何自然现象。这与他的祖国“十八世纪最伟大最谦虚的数学家”拉格朗日 (Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813)截然相反，后者在他似乎最需要图形的杰作《分析力学》前言中颇为得意地特别强调：“这本书找不到图”。移居到美国东部后，芒德勃罗从属于经济学的关于棉花价格变化无序之间发现有序规律的“尺度无关性”，到属于工程科的为消除电话线噪音提出的描述信息传输误差分布的新策略，为自己日后创立新几何提供了具体的模型、铺下了前进的道路。

没有哪个同事理解芒德勃罗研究实际复杂问题时改变尺度、化繁为简发现规律的新颖做法，但他正在做的“几何分析”思想的老祖宗却是那个下半辈子由于思想超前而被逼疯的康托尔。不连续性、随机噪声，错综复杂的海岸线，都被欧几里得的几何学拒绝于千里之外，都被牛顿的微积分扼杀在摇篮之中。直线与平面、三角形与圆、椭球与锥体，是多么美丽的几何图形，托勒密 (Ptolemy, 约 100-178) 用以构造宇宙学说、毕加索 (Pablo Picaso, 1881-1973) 用以画出传世之作。欧几里得的几何占据了我们的大脑已有两千年之久，阻碍了我们“非常规的思维”。康托尔革命性的“三分集”构造，是近代科学四百年历史上第一次对经典几何的反动。

芒德勃罗传播他的新几何思想：云彩不是球面、山峰不是圆锥。不规则的自然世界具有像康托尔三分集那样的结构和特征。2010 年底的冬天对北京的居民来说是一个“无雪的冬天”。当入冬后过了一百多天，第一场雪姗姗来迟时，多少人欢欣雀跃。但是，他们是否仔细瞧瞧搓在手掌心中的雪花?

1996 年的某天下午，在美国密西西比州 Hattiesburg 市橡树园小学读书的一位名叫丁易之的小女孩放学一回到家，就迫不及待地告诉她在大学数学系教书的爸爸：

“Dad，今天我们‘提高班’的老师讲了 chaos！”

接着，她拿出一支笔和一张纸，先画了一个大的等边三角形。然后她把三角形的每一条边分成三等份，以中间的那部分为底边又画了一个形状一样但边长小三分之二的三角形。结果是一个有十二条边的六角形。在每一条边上，她做同样的事，以中间的三分之一段为底边画上更小的等边三角形。她一直画到越来越小的三角形看不清楚为止。

看到这些，丁易之的爸爸颇为惊奇。在美国，这么小的孩子就能知道一些当代科学的初等概念，而在中国，他们整天被关在教室里做习题。于是，他笑眯眯地喊着他女儿的小名说：

“丁丁，你可以告诉你的老师，你爸爸的导师和他的导师就是定义什么是 chaos 的两个人。等你长大点我可以告诉你关于 chaos 更多的故事。”

2005 年，丁易之为台湾的“庆祝李天岩六十生日国际研讨会”翻译了她爸爸写的“李天岩学术传记”，从中知道了更多关于混沌的历史。

设想我们能把丁易之画三角形的过程一步步做到无穷，就看到围在外面的由折线边构成的边界变得越来越细微，就像构造康托尔三分集的过程中变得越来越稀疏一样。它最后的形状就像北京人手中融化前的雪花。瑞典数学家科克 (Helge von Koch, 1870-1924) 早在 1904 年就描述了这个“雪花”的边界线，现在它就被称为“科克曲线”，又经常被形象地叫做“科克雪花”。

科克曲线和康托尔的三分集一样具有自相似性。如果我们割下科克雪花的一边，再把它的三分之一部分放大三倍，就得到和原先割下的那片一模一样的图形。科克曲线自相似性的放大因子也是 3。

科克曲线围了一个有限的区域，事实上这个区域包含在原先的等边三角形的外接圆之内，因而它的面积是个有限数。外接圆的周长也是有限的，因为它是圆直径的 π 倍。但是科克曲线的长也是有限的吗？

我们来算算看。假设三角形的三个边长都为 1。那么它的周长等于 3。在每一步后，各个顶角的两边各长出一个边长缩短了三倍的三角形，因而这一步后的周长等于上一步后的周长乘上 4/3。这样，第一步后的周长为 3(4/3),第二步后为 $3(4/3)^2$，第三步后为 $3(4/3)^3$。由此类推，第n步后的周长为 $3(4/3)^n$ 。这个数随n的变大也变得越来越大，没有上限。因此我们得到一个令人难以置信的结论：连续、永不自我相交、连通、并位于一个有限区域内的科克曲线的长度是无穷大，和两边无限延长的一条直线一样长！

科克曲线这个有穷区域的无穷长边界线在上世纪初让见到它的数学家睡不好觉，它太和直觉不容、它太和常规相悖，在当时的数学主流世界被视为一个怪物，因而成了一个被遗弃的无人领养的“私生子”，直到芒德勃罗把它捡起，让它复活。他把科克曲线看成是“粗糙而生动的海岸线模型”，把它看成现实世界的图像，用以解释丰富多彩的自然现象。

虽然现在最时髦的理论物理学家在他们的“超弦理论”中断言我们周围的宇宙至少有十维，我们只感知生活在三维空间之中。也许是四维之中，如果时间另加一维的话。我们行走的地球表面却是二维的球面，我们的小轿车开过的高速公路只是一维的线，花粉过敏者的鼻子最不想吸入的微小颗粒大概算是零维的点。但是维数的概念也和观察者的尺度有关。春天里老让人打喷嚏、令人困扰的花粉在我们的眼里是个零维的点，但在吸附在它身上的细菌看起来（如果细菌有眼睛的话）却是一个三维的庞然大物。

欧几里得两千多年前就精确地告诉我们什么是点、什么是线、什么是平面，它们的维数分别是 0、1、2。二维平面内的一维曲线不用周围，面积为零，只有长度，而三维空间中的二维曲面不占空间，体积为零，只有面积，这些“常识”已在我们的头脑中根深蒂固。直来直去、表里如一者往往被人说成“一维个性”，能说会道、左右逢迎者可被称为“二维巧匠”，翻手为云、覆手为雨者大概非“三维大师”莫属。

对西方文明影响最大的古希腊哲学家亚里士多德 (Aristotle, 公元前 384-前 322) 也说得清清楚楚：“直线在一个方向上有大小，平面在两个方向上有大小，而立体在三个方向上有大小；除此以外，就没有其他大小了，因为这个已是全部了…… 不同种之间的大小是不能转化的，如从长度到面积，从面积到体积都不能转化。”

“整数维”已经在我们的头脑里挥之不去。如果有人说，这个东西是半维的或一点五维的，我们会认为他要么是个诗人，要么是个疯子。须知，美国上世纪最伟大的诗人大都在疯人院里写出他们最伟大的诗篇。

但是，当芒德勃罗宣称科克曲线的维数是 1.2618 时，他不是疯子，他是 IBM 心智健康的科学家。他也不是诗人，但是他喜欢引用爱尔兰多面手作家斯威夫特 (Jonathan Swift, 1667-1745)的语句：

于是博物学家看到小跳蚤，

又有小跳蚤在上面跳，

它们又挨小蚤咬，

这样下去没个了。

我们用比直觉多一点的“数学”方式来检验维数的概念。一条长度为 1 的线段可以被分为n^1个小段，每段长 1/n。一个边长为 1 的正方形可以被分为n^2个小片正方形，每片面积为 $1/n^2$。类似地，一个边长为 1 的立方体可以被分成n^3个小块立方体，每块体积为 $1/n^3$。这三个数n^1、n^2、n^3中的“指数” 1，2，3 就分别是线段、正方形和立方体的维数。

在以上的“化整为零”的剖分之中值得注意的是：无论是小线段、小方形、小立方，放大 n 倍后就和原先的图形一模一样。它们也有和康托尔集合

或科克曲线一样的自相似性，这个 n 也是所谓的“放大因子”。采用放大因子，加上“对数”这个工具，芒德勃罗告诉我们：

线段维数为 1，因为小线段个数的对数除以放大因子的对数等于 1；正方形维数为 2，因为小方形个数的对数除以放大因子的对数等于 2；立方体维数为 3，因为小立方个数的对数除以放大因子的对数等于 3。

芒德勃罗用同样的想法来计算科克曲线的维数。希望我们还记得在其构造的第一步，原先的三角形的每条边生成四个小边，其放大因子为三. 这么一来，他就算出科克曲线的维数等于 4 的对数除以 3 的对数，约为 1.2618。

这个分数就被芒德勃罗视为英国海岸线的“维数”，它比一大点，比二小点。因而，怪模怪样的海岸线比笔直的高速公路“宽些”，但比平整的飞机场“窄点”。类似地，可以算出康托尔三分集的维数等于 2 的对数除以 3 的对数，差不多是 0.6309。粗糙不平的乡间马路的维数可以是 2.25。

革命的时机成熟了。1975 年冬天的一个下午，芒德勃罗要为他刚完成的开天辟地的大书命名。一个新学科总要有一个名字，像刚出世的新生儿。他“老来得子”的儿子刚从学校放学回来，于是他借了儿子的拉丁语词典翻了翻，如同当上爷爷的中国老学究为求孙子一“佳名”而沉入康熙字典。拉丁文是英文的祖先。没有什么比最接近 英文单词 fraction（分数）的什么东西更能反映这个学科的特色，于是，他把这个单词的最后三个字母“ion”巧妙地改成“al”，从而造了“fractal”（分形）这个数学名词，它既是名词又是形容词，既属于英语，又属于法语，代表了他生活过的两个国家。芒德勃罗造字的历史功绩，大概只有中国唐朝的女皇帝武则天(624-705)才敢相比。

1977 年，芒德勃罗的第一部著作《分形：形态、机遇和维数》(Fractals: Form, Chance and Dimension) 出版了，它宣告了新几何“分形学”的诞生。1982 年，他对这本书增订修正，以《自然的分形几何》(The Fractal Geometry of Nature) 新名问世。这引发了科学界甚至一般民众对“自然界的分形美观”狂热的注意，就像美术爱好者趋之若鹜地涌向毕加索的画展那样。

（十） 自由王国的几何

芒德勃罗的著作让人们再次以欣赏的眼光审视大自然的杰作。在分形几何统一思想的旗帜下开始聚聚不同学科的科学家，他们在各自的领域里看到了特异怪癖之处，经典的思维无法解释。

我们周围花花绿绿的世界并不总是规则有序的，一直在统治着我们中学教科书的欧几里得几何对此却束手无策。放眼看去，缥缈不定的彩云、雷霆万钧的闪电、纷纷菲菲的落雪；绵延不断的群山、蜿蜒曲折的海洋、崎岖不平的马路；跌拓多姿的人生、变幻莫测的心理、叱咤风云的官场，怎能用简单平滑的整数维数来描绘？

1978 年，美国哥伦比亚大学地球物理学家肖尔茨 (Christopher H. Scholz, 1942-) 一买到芒德勃罗的书，就觉得它在自己的工作中大有用武之地。在他看来，既然地球表面和海洋相交的海岸线有分形结构，地面顶部的内表面所形成的“分裂层”也会具有相似性。这些断层控制着地层中流体的运动和地震的活动，深入了解它们十分重要。他最终成了在这个领域里头成功应用分形技术的少数几个名人之一。

造物主把我们身体的组织结构设计得几乎是天衣无缝，除了极少数的不甚重要之物，比如阑尾。血液走遍全身，动、静脉血管、毛细管到处密布，既形成连续的分布，又大玩分形结构的把戏，这样它们既有巨大的表面积，又能挤进小于人体 5%的体积，活像科克曲线那样。难怪芒德勃罗大开英国文豪莎士比亚(William Shakespeare, 1564-1616)的经典喜剧《威尼斯商人》的玩笑：那个贪婪而阴险的犹太放债人夏洛克不光做不到不流血地割下一磅人肉，就连割下一毫克都办不到！

我们的心肺循环系统呢？跟随芒德勃罗前进的生理学家们很快发现，是分形描述，而不是早先的标准描述与支气管的分支的数据吻合。心脏跳动的频率图服从分形规律，传输电脉冲的纤维网络也是。充满肺泡的肺容纳巨大的表面积，成了人体中最典型的分形组织，它的维数是 2.17。泌尿系统是分形，肝脏里的胆管也是，好像我们的内部身体完完全全按照分形的蓝图被全能的“上帝”制造出来的。甚至我们外部身体的头发也可被装饰成分形的式样，在美国纽约市的大街上走一圈有时能观赏到如此引人注目的头型。

芒德勃罗把自然界像无穷树杈一样的分形结构的复杂之处反而解释成是“在欧几里得几何意义下存在的现象“。在分形几何的意义下，这些复杂性简单得好像是最自然不过的透明体。他指着阳光之下的树说，像我们自己身体里的心肺循环系统一样，树叶需要分形表面的枝叶优化自己的光合作用。“创世者”总是要按照“最优化”的原则来行事。笛卡尔的同代法国人、也许是有史以来最大“业余数学家”的费马(Pierre Fermat, 1601-1665)近四百年前就知道光是按“最短时间原理”走路的。

这就把人们的视线投向植物园里多姿多彩的树叶。天啊，仔细一看，表面起伏不平的它们真的具有诗意浓浓的分形体态。看来，在性态的发生过程中，分形尺度不仅是常见的，而且是普遍的。

2005 年的夏季，位于美国东南部的南密西西比大学科学与数学教育中心的研究生们在主任和任课教授的带领下驱车西行，像好莱坞电影中的“西部牛仔”那样踏上了西南部科学教育探险之旅。历时两周的探索和求知，硕果累累的他们回校之后举办了科学汇报会，其中来自中国的数学教育博士生叶宁军的“分形之旅”报告最受欢迎。她在仙人掌到处可见、乌拉姆呆过多年的新墨西哥州的广阔沙漠地带细心考察了这些大自然的分形杰作，并与“分形几何学”中那些著名的分形图形进行了有趣的比较和分析。

在芒德勃罗的分形图形到处张贴之后，人们突然间发现“混沌”与“分形”在更多的数学场合出现，这两个新术语之间有着千丝万缕的相互联系。

中学生已经知道什么是像 2 + 3 i这样的复数，这是几百年前为了求解二次方程 $x^2 + 1 = 0$ 不得不创造出来的“虚无缥缈”之数。这“由实（在）数到虚（幻）数”的一跳，解决了许多大问题，例如，在复数的范围里，每个代数方程都有根。复数的加减乘除运算法则与实数几乎一样简单，只要记住一个死规定：虚数单位 i 的平方等于 -1。

巴恩斯利 (Michael F. Barnsley) 这位牛津大学数学系 1968 年本科毕业的英国人、1972 年美国威斯康星大学的理论化学博士，在 1979 年的一个会议上见到芒德勃罗之后，就认为倍周期分叉和普适性的思想都是好东西。他思忖着，这些在实数范围内玩的游戏可能在复数世界里更好玩。这也许是个好想法，他说干就干。他把芒德勃罗在实数轴上玩过的二次函数搬到复数点的平面上，不过他把它的外形稍微改了一下：$z^2 + c$，其中，z是复自变量，c是一个可取不同数值的复参数。当他用计算机不断迭代时，一些妙不可言的形状开始浮现，令他激动得赶快在他位于美国亚特兰大城的佐治亚理工学院的办公室写就了一篇论文，寄给了《数学物理通讯》的编辑。

这名编辑恰好就是茹厄勒。他告诉作者，五十年前他的两名法国老乡法图(Pierre J. L. Fatou, 1878-1929) 和尤利亚(Gaston M. Julia, 1893-1978) 就发明并研究了它，尽管靠的是没有计算机的艰苦劳动。巴恩斯利回忆当时：

“茹厄勒把它像一个烫手的山芋那样扔回给我，并说：‘巴恩斯利，你说的是尤利亚集。’”

尤利亚集是二次多项式z^2+c的迭代点保持有界的所有那些初始点组成的集合的边界。不同的参数值c 对应于不同的尤利亚集。它们呈现出各种各样的分形形状，“有的是变肥的浮云，另一些是瘦削的棘丛，还有的像火灭后在空中飘动的火星。”数学为自己的领土提供了无数的分形例子。

虽然拒绝了巴恩斯利的投稿，茹厄勒还是给了他一个好的建议：“你和芒德勃罗联系一下吧。”

巴恩斯利很快发现，芒德勃罗已经走得比尤利亚更远了。芒德勃罗大概 20 来岁时看到过尤利亚和法图在第一次世界大战时期写的文章和当中画的图形。1979 年，他想看看他这两位前辈数学家搞过的二次多项式z^2+c当参数变化后迭代有哪些变化。他每次都只从 0 这个原点开始迭代，威力强大的计算机大大帮助了他，使他能在屏幕上看到这些迭代点序列最终是否“远走高飞”，或总是在一个有限区域内徘徊。他把具有这两个互相排斥的迭代性质的参数值在视觉上区分开来。由他定义的这第二种参数之集合，即迭代点永远有界的所有那些参数值c的全体，现在当之无愧地以他的姓命名。

这个 1980 年定义的上下对称的“芒德勃罗集”，它的轮廓看上去像海马的尾巴再附上形状一如整个集合的微粒岛屿群。它既是迄今为止最复杂、最有趣的分形之一，也是最难研究的几何对象之一，连它的创造者都感到头疼。比如，这个集合是否像科克雪花一样是“连通”的，即整个大陆是否与伸得远远的半岛相连？他不能断定，因为计算机不能代替严格的数学证明。相差十岁的法国巴黎高师数学教授多阿第(Adrien Douady, 1935-2006) 和他过去的博士生、美国康奈尔大学数学教授哈伯德 (John H. Hubbard, 1945-)用到复变函数论和动力系统的双重知识证明：是的，它是连通的。芒德勃罗集的每一个漂浮的细微颗粒的确是挂在一根细细的线上，这细线又把它连接到集合的其他“魔鬼的聚合物”部分上。

在同一时期内的某个学期，哈伯德在法国教大一的微积分。他没有想到自己的一部分事业竟和计算数学中古老的牛顿法联系在一起。牛顿在他老年的时期用到了这个方法，现在这个办法的所有现代形式都冠以他的大名，尽管苏联的数学家和经济学家、1975 年诺贝尔经济奖获得者康托诺维奇(Leonid Kantorovich, 1912-1986) 对它的收敛性理论作出了系统而主要的贡献。

经典牛顿法求解一个未知数的实数方程的思想很简单。方程的解是函数的曲线和 x−轴的交点坐标。取解点的一个近似点，在曲线上对应的那点作一条切线，它和 x−轴的交点比第一个猜测更靠近解。重复这个过程就得到近似

解的一个序列，可望能收敛到解。如果第一个猜测取得足够好，意思是和未知的解足够接近，那么这个迭代过程是收敛的，而且，收敛的速度很快。

但是如果初始猜测不好，迭代不收敛了，那怎么办？教了多次微积分课本里介绍的牛顿法，有点厌倦标准教法的哈伯德想换换花样。他把目光转向在复数平面上用牛顿法解最简单的三次方程$z^3 - 1 = 0$，即算出 1 的三个立方根，分别是实数 1 和两个复数根 $(-1 + i\sqrt{3})/2$ 和 $(-1 - i\sqrt{3})/2$。这三个解在复平面上形成一个等边三角形。给出一个初始点，他让学生们看看牛顿法将引到三个解中的哪一个。

这实际上成了一个标准的具有三个“吸引子”的动力系统问题。哈伯德让计算机决定哪些点走到第一个解，哪些点趋向第二个解，哪些点导致第三个解。这些到达不同目的地的初始点分别用三个不同的颜色区别开来。在粗糙的选点下，牛顿法的动力学果然如他所猜把平面分成三个扇形，但随着选点的越来越精细，他和学生们发现这三个区域的分界线越来越不清楚，三种颜色互相缠绕，只要两种颜色靠近一些，第三种颜色便乘虚而入，挤进来夹在中间，这又引起一连串新的自相似的涌入，似乎没有哪个点可以分开任两种颜色。就这样，美国数学教授哈伯德和修他课的法国学生们“意外”地发现了已经使用了几百年的牛顿法所“制造”的分形图。

色彩迷人的分形的美学价值很快引起更多人的欣赏。那些斑驳琉璃的牛顿法图形，那些波涛汹涌的海洋卷起的层层巨浪般的尤利亚分形图案，那些曲曲弯弯的平衡状态“吸引域”分形边界，增加了普通大众的艺术享受。成百上千来自四面八方的信件像“科克雪花”似地飘进哈伯德的办公室，索求芒德勃罗集等等的图片。一时间，他忙得只好请系里的研究生帮上一手。巴恩斯利不光写了一本关于怎样用他发明的“迭代函数系统”的有效技术画出分形的好书，并且干脆办起了他本人商业性的“迭代公司”。他把自己的技术说成是“混沌游戏”，它可以随心所欲地“成批”生产各种各样形状的分形图，像卷心菜、霉菌、甚至泥土，包括他童年起就喜欢的蕨类植物叶子。

两个德国人也粉墨登场了。数学家帕特根(Heinz-Otto Peitgen, 1945-)和物理学家里希特(Peter Richter)合作了转向分形的事业。他们编著了一本精美的厚书《分形之美》，1986 年由德国最好的学术出版社斯普林格出版，书中漂亮的彩色分形图也成了推销书的卖点之处。他们用计算机生成的分形艺术之作在全球巡回展览。既懂物理又通生化的里希特又订购了一只可以调剂身心的“混沌双摆”，放在自家的窗台上，随时观察它不可预测的互摆运动。

芒德勃罗几何革命的狂风暴雨也催醒了在故纸堆里沉睡了已大约一个甲子、和科克曲线差不多一样老的另外一些怪异图形，它们当中有所谓的“皮亚诺 (Giuseppe Peano, 1858-1932)曲线”和“席尔宾斯基 (Waclaw Sierpinski, 1882-1969) 地毯”。意大利产的“一维”皮亚诺曲线居然能够跑遍一个二维正方形的所有点，令人纳闷。但是，这些都是一百年前当数学遭遇到“集合论危机”时少数几个像法国印象派画家那样“怪诞”的数学家生下的怪胎。

芒德勃罗没有将分形的思想全部归己所有。在他《自然的分形几何》书中某一节的“历史梗概”中，他写道：

“分形的几个基本思想可以追溯到古希腊的亚里士多德和十七世纪的莱布尼茨的时代，分形的思想可以说是源远流长。”

在百家争鸣的古希腊，毕达哥拉斯把万物归于整数，引来了无理数的责难；芝诺(Zeno, 约前 490-前 430)的四个“运动悖论”，让连续与离散相撞。亚里士多德对“世界的连续性”深信不疑，以至于让莱布尼茨发明微积分后还要想定义“分数阶的导数”以保证“阶数的连续性”。但是到了十九世纪的中叶，由于对数学分析语言严格化的要求，微积分的坚实基础由捷克的波尔查诺 (Bernhard Bolzano, 1781-1848)、德国的魏尔斯特拉斯、以及法国的柯西(Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857)等几位“几乎处处严格”的数学家们铺垫下，甚至连“函数”这个最原始、最重要的概念也有了现代化的定义，而不是原先的那种只是“连续曲线”的代名词。在这时候，各种各样“病态”的函数纷纷出笼。当过多年中学数学教师的魏尔斯特拉斯于 1872 年构造了一个处处连续但又处处没有导数的函数，这就打破了人们普遍认为的“曲线应有切线”这一传统观念。到了“离经叛道”的康托尔时代，人们可以定义奇形八怪的点集，可以构造一笔“画”不出图像的函数。名字很长但寿命不长、只比魏尔斯特拉斯大了十岁的同胞数学家狄利克雷(Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859) 就定义了这样的一个函数，它在所有有理数上的函数值都为 0，而在所有无理数上的函数值都为 1。

一百年前辉煌的波兰数学学派领头人、乌拉姆青年时期的另一个老师席尔宾斯基构造了如下的“席尔宾斯基垫圈”，现已成为“分形几何”这门学科中众多图形中的一个“代表之作”。

取一个等边三角形。去掉连接它的每条边中点所形成的那个小等边三角形，但保留其三条边。对剩下的三个同样大小的等边三角形重复做同样的事情，一直做到无穷。所有剩下的那些点组成一个处处稀疏的图形，像海绵一

样处处有洞，但包含有不可数的点。像科克曲线一样，这个席尔宾斯基三角形也是自相似的，其放大因子为 2。

席尔宾斯基的等边三角形分形在新世纪之初被美国南阿拉巴马大学的数学教授、具有微分几何背景的张新民推广成任意的锐角三角形分形，但他要用到欧几里得几何学里的“垂足”概念。

任意画上一个三角形，从它的每个顶点作其对边的垂线，和对边的交点称为垂足。三个垂足组成的新三角形叫做原先三角形的“垂足三角形”。如果原先的三角形是锐角三角形，那么它的垂足三角形在其之内。若原先的三角形是钝角三角形，则垂足三角形有一部分在它的外面。直角三角形的垂足三角形退化成连接斜边上的垂足和其对应顶点的一条线段。

垂足三角形出现在庞加莱的同时代人、英国剑桥大学教授郝博生 (Ernest W. Hobson, 1856-1933) 1891 年写的《三角学教程》书中。从一个三角形出发依次作出一个又一个的垂足三角形，形成一个无穷序列，类似于依次迭代一个数值函数。这样的三角形形状的变化有意思吗？是有序的还是无序的？

电影《美丽心灵》的主角、五十年代的国际数学明星、被精神病折磨了三十年最终 1994 年因他十几页关于博弈论的博士论文开创性工作而荣获诺贝尔经济奖的美国俊杰纳什 (John F. Nash Jr., 1928-) ，四十年代在第一个颁发的工学博士(1919)是中国人茅以升(1896-1989) 的卡内基工学院读本科时的数学系主任是一位名叫辛格 (John L. Synge, 1897-1995)的爱尔兰人。高寿的辛格数学生命也很高寿，他活到 90 岁时对垂足三角形迭代突发兴趣，居然和一位合作者于 1989 年在《美国数学月刊》上刊登了一篇论文。该文告诉读者：迭代垂足三角形可以有任意周期！

比如，初始三角形为等边三角形的垂足三角形也是等边三角形。这等于是说：等边三角形是“垂足三角形迭代”的一个不动点。如果初始三角形的三个角的角度为 43°，44°，93°，迭代七次后的垂足三角形也有同样的形状，就是说，有一个周期为七的点。再来看看角度分别为 50°，75°，55°的初始三角形，它迭代四次后成为一个周期为三的点。这就让我们一下子想起李–约克的“周期三意味着混沌”这句名言。

辛格的迭代引起了出生在匈牙利的美国纽约大学柯朗数学研究所的大牌人物之一拉克斯 (Peter D. Lax, 1926-) 的极大兴趣。他第二年马上也在《美国

数学月刊》上发表了一篇论文，用初等的大学生能看懂的方式论证了垂足三角形迭代的混沌性和概率性质。

锐角三角形的垂足三角形有一个后来吸引了张新民注意的性质，学过中学几何的人都可以证明它：挖掉垂足三角形之后剩下的三个小三角形都和原先的那个三角形有一样的形状。这个“自相似性”让他想起了席尔宾斯基三角形，并一下子给这个“欧洲产儿”找到无穷多个“北美弟兄”：

任意画上一个锐角三角形，作出它的“垂足三角形”。将这个垂足三角形去掉，原先的三角形剩下的部分由三个小一点的三角形组成，对它们的每一个画出对应的垂足三角形，并去掉它们，这样就剩下九个彼此相似的三角形。继续做同样的事，直到无穷，所有留下的点的全体构成一个分形。张新民比较谦虚地把它称为第一个三角形所对应的“席尔宾斯基垂足三角形”，而没有附上他自己作为发明者的名字，尽管至少别人可以有理由这么做。不同的锐角三角形给出不同花样的“席尔宾斯基图案”，如果一个角很小，这个分形看上去颇像中国新疆维吾尔族姑娘的长辫子。

早先的席尔宾斯基三角形只是新的一大类席尔宾斯基垂足三角形中的一个成员：席尔宾斯基三角形就是等边三角形所对应的席尔宾斯基垂足三角形。这个“众星拱月”的“王子”的维数等于 3 的对数除以 2 的对数，大约为 1.585。他的那些亲戚呢？王子的维数是否在所有的家族中最小？这些都是对“动力几何”这门学科感兴趣的张新民迫切想知道的事。他在同事的帮助下用计算机做了一些试验，发现他的猜测好像是对的。比如说，如果三角形的三个角的角度为 60°，45°，75°，维数大约是 1.634；三个角若是 65°，35°，80°，则大约为 1.688 维；如为 75°，25°，80°，约 1.875 维。可惜，维数函数的解析表达式无法写出，故不能直接算出分形维数的值。

不久，大嗓门、会教书的张新民被在相距 120 公里以外的邻州的南密西西比大学数学系当教授的丁玖邀请去做一个数学讲座。他向后者提出了这个“维数猜想”。像师傅李天岩一样，在南京大学何旭初(1921-1990)教授门下拿到“最优化理论”硕士学位的丁玖只用了初等微积分的“隐函数求导术”以及“最优点充分条件”就很快地证明，“王子”的维数比他的“近亲”都小，但对“远亲”尚不得知。但这只解决了一个“局部极小”的问题。

2007 年秋，丁玖在复旦大学数学系作的一个关于“从有序到混沌”的报告中提到了张新民的“整体极小”猜想。一位名叫李昭的研究生听了他的演讲后，思考了这个问题，并提出了一个巧妙地应用“凸函数”性质的解决思

路。翌年之春他们完成了合写的论文，从投稿到被芒德勃罗在耶鲁的同事和合作者任主编的《分形》(Fractals) 期刊接受，只用了不到一个月的时间。

作为这一连串故事的的结束，张新民关于席尔宾斯基垂足三角形“维数函数”的另一猜想却被李昭复旦数学系的学长、中国科学院计算数学与科学/工程计算研究所的唐贻发在和丁玖 2010 年发表在同一期刊的文章所否定，用到的数学工具还是初等微积分。然而他们似乎隐隐约约地感到对于这类分形的维数函数，还有一些谜团存在，这是否导致另一分形结构还不得而知。

（十一） 尾声

混沌与分形一百年来的演化史，是一部“引无数英雄竞折腰”的数学史和科学史。从庞加莱到斯梅尔，从乌拉姆到李天岩，不光以他们的科学建树留名青史，更以他们多彩多姿的人生轨迹影响大众。

庞加莱强大的几何直觉和科学洞察力让他毫不犹豫地留给后人大量的定理、更多的思想。尽管有些还没有被严格地证明，但他几乎都是对的。作为伟大的数学家，作为现代纯粹数学几大学科的创立者，他生前却是被提名最多次的诺贝尔物理奖候选人，提名者包括和科学史上和牛顿地位一样高的爱因斯坦(Albert Einstein, 1879-1955)。他对牛顿、拉普拉斯等“机械决定论”自然观的无情批判，他在《机遇》一书中所集中阐述的“偶然性”与“必然性”之含义和联系，为混沌学和分形几何学的发展铺下了哲学基础。戴森会毫不犹豫地把他划为一只“科学的大鸟”。

冯 · 诺依曼和乌拉姆这两位科学和人生的亲密战友，惺惺相惜、彼此欣赏、相互理解。他们分别是匈牙利民族和波兰民族对美利坚合众国巨大智力贡献的代表。只要读一读麦克雷(Norman Macrae, 1923-)撰写的冯 · 诺依曼传记，只要看一眼当事人之一戈德斯坦(Herman Heine Goldstine, 1913-2004) 所回顾的美国现代电子计算机发展史，就可以想象，如果寿短的冯 · 诺依曼多活十年，只要他在洛伦茨的办公室里看到天气预报奇怪的计算结果，彼此交谈一个小时，混沌学的发展立刻会有一个“大跃进”。

乌拉姆终生都对“Pattern”（模式）着迷，这大概源自家中他婴儿时代天天见到的地毯图案。作为非线性分析的主要“始作俑者”，从洛斯阿拉莫斯的岁月开始直到离开人世，他都在思索“模式”这个“主题词”。读一遍他收录在后人为他编纂的文集《科学、计算机、及故友》内的一文，“图形变化的模式”(Patterns of Growth of Figures)，就可对他的非线性迭代思想“略

见一斑”。他留在《数学问题集》中的方法和思路，成就了几代数学家的事业，包括李天岩三十岁前另两大数学贡献之一的一维函数“乌拉姆猜想”之解决（第二个则是属于计算数学领域的“现代同伦延拓算法”），以及中科院计算数学所的周爱辉与合作者丁玖于 1996 年解决的关于多维函数的乌拉姆猜想。他的“乌拉姆方法”是三十五年前由于李天岩的工作而开始的“计算遍历理论”这一学科的开山鼻祖。

洛伦茨这位一直保持绅士风度、彬彬有礼的和蔼老人 2008 年 4 月去世，距离他的 91 岁生日仅差一个多月。他留给世人的“洛伦茨吸引子”成为了混沌学领域中最有名的奇异吸引子。没有哪个图形比这条无限缠绕不止的活像猫头鹰面部的双螺旋线更包含混沌的全部内涵、更富有想象力、更具有深远意义。在谈论混沌的成千上万篇技术论文的丛林中，很难找到一篇比被人夸奖为“那是一篇妙文”的“确定性的非周期流”被引用得更多。

从洛伦茨的照片就不难推断这是一位从里到外一贯如此的谦谦君子，一生中都保持着低调作风、充满涵养的儒雅学者。按照名记者格莱克锐眼的观察，生前的他“面孔像饱经风霜的美国老农，然而眼睛又是出奇地有神，使他看起来好像总是在笑。他很少谈论自己或自己的工作，只是在倾听别人讲话。”这寥寥几笔，让我们似乎看到中国画家罗中立(1948-)三十年前感动国民的那幅著名油画《父亲》主人公满脸分形般密布的皱纹，又好像面对既有看尽“人性弱点”的讽刺小说《围城》、又有笑傲“文史群雄”的煌煌巨著《管锥编》的“文化昆仑”钱钟书脸上那着实迷人的孩子般的灿烂笑容。

斯梅尔七十年代进入了经济学领域，他关于“一般均衡理论”的数学“帮助”了本校的一位经济学教授德布勒(Gerard Debreu, 1921-2004)1983 年荣获了诺贝尔奖。八十年代他开始研究算法，提出了大范围牛顿法。后来他领导一批人探索计算的基础理论。他不光自己是个杰出的数学家，也培养了一批卓越的学生，如他手下最早的博士科佩尔(Nancy J. Kopell, 1942-)和舒布(Michael Shub, 1943-)以及 31 岁病逝的天才鲍恩(Rufus Bowen, 1947-1978)。

斯梅尔对任何感兴趣的事都有一往无前的精神。六十年代中期他开始了世界各地珍贵矿石的收藏，并逐渐成为一位世界级收藏家。他不畏劳苦地寻找矿石之宝，就像他寻找数学的瑰宝一样入神，使得他在数学和矿石世界同样达到高峰。由于他学得一手高超的摄影技术，无法进入他家收藏室一睹为快者可在万维网上欣赏他的部分优美矿石。他的冒险不止于数学、政治和矿石。年轻时的他曾和同伴另辟新路攀登过一座近一万四千英尺高的俊峰。五

十七岁时他担任一艘四十三英尺长的双桅帆船船长，率领两位同事冒险远航三千海里之外的太平洋马克萨斯群岛之一的希瓦瓦岛。

2002 年北京国际数学家大会召开前的几个月，让包括中国大陆在内的部分数学家担心斯梅尔是否“老来弥坚”地重演一幕三十六年前的莫斯科“记者招待会”。毕竟，西方人，数学家包括在内，常常断言并试图“证明”中国“缺乏人权”。可是，又是一次“杞人忧天”。今天的斯梅尔，六十四岁从他连续任教三十年的加州大学伯克利校区退休后应丘成桐邀请接受了香港城市大学“杰出大学教授”的聘书，看到了中国的巨大进步，目睹了香港的回归祖国。他已加入在中国的大地上培养人才的教授行列。2010 年 4 月，第二次应聘香港同一所大学的斯梅尔在本校的陈关荣陪同下访问了中国科学院数学与系统科学研究院、清华大学和北京大学，并做了三场学术演讲，报告他最新的研究结果，掀起北京的数学家和学生们的一阵激动。现在，年逾八十的他还在香港继续不知疲倦地工作着，还经常和年轻人一起去爬山。

享有盛名的梅好像是头衔最多的“混沌学家”。除了当过十五年普林斯顿大学动物学“1877 级班”讲座教授外，他连续十一年担任同一大学的“研究董事会”主席。他 1979 年被选为崇高的英国皇家学会会士。1988 年离开美国后他一直任教英国, 被聘为牛津大学和伦敦王家学院的双校教授。1995 年至 2000 年他身为英国政府首席科学顾问，然后又干了五年的皇家学会会长。我们不必再列举他几乎“不可数”个其他的职位、奖项、名誉称号了，只加一项：最后，他被女王封爵。

戴着“杰出大学教授”桂冠的约克和他的“左膀右臂”合作者已让美国马里兰大学成为混沌研究的圣地之一，2003 年他和芒德勃罗共享属于“自然界复杂行为”范畴的“东京奖”。约克的名字好像已成混沌学的代名词，而他几十年如一日的“马克思式”的大胡子也成了他本人的不变“模式”。上世纪末的某个短暂的时间段，他的胡子飞了，露出了面部的庐山真面目，让他的粉丝几乎不认识他了，于是在一片“抗议”声中，他恢复了本来面目。

拥有密西根州立大学“大学杰出教授”头衔的李天岩曾经让他八十年代中期在中国大陆招收的五、六个都是国内名牌大学数学系七七级本科生的博士研究生害怕，因他经常在他们每学期“讨论班”的第一天“训话”：“我不希望你们今后在‘麦当劳’端盘子”（意指要好好做学问）。但是久而久之，大家发现他脸“冷”心“热”。他对学生有一句名言：如果你们碰到任何困难，只要想想我的身体，就没有困难了。的确，1974 年拿到博士后六个星期，他的血压竟高达 220/160 毫柱，原因是肾脏开始坏了。洗肾持续五年

半，每周要三次，每次要花五个小时，结果无济于事。1981 年他手足情深的同胞妹妹给他的一个肾脏移植，让他活到今天。可以说，全身动过十多次大手术的李天岩是美国的“史铁生”，而双腿瘫痪、洗肾几十年、作品震撼人心的小说散文家史铁生(1951-2010)是中国的“李天岩”。他们俩都是“天岩铁生”的，是生活的挑战者、事业的攀登者、不屈不饶精神的实践者。

费根鲍姆后来发展的用于地图制作的分形方法以及实用软件，让新地图集里海岸和群山更有真实感、更具吸引力，尽管他曾遭受那个“分形之父”的“恶意中伤”。他的“普适性”也让他成为普天下名校争相聘用的科学明星。1986 年他接受了美国洛克菲勒大学的“丰田”讲座教授位置，并固定在那里再也不动，因出名前的他动得太频繁了，四年之中在几乎覆盖美国大地的一个直角三角形从一个顶点疲倦不堪地跳到另一个。当年每天“二十五”个小时艰苦的智力劳作让非他莫属的名誉和奖项纷至沓来，包括 1983 年的麦克阿瑟(John D. MacArthur, 1897-1978) 天才奖到 1986 年的沃尔夫物理奖，让他满盘收获“辛勤汗水浇灌的幸福之树”结下的甜蜜果实。

芒德勃罗大概是最受争议的新型科学家之一，在他出名前是如此，在他出名后也是如此，尽管他几十年来光环满身，包括 1985 年美国科学院五年一颁的巴纳德奖。有人对他常和古人“争功夺利”不满，有人说他从未证明定理，更有人说他不是数学家。四十年代当过冯 · 诺依曼的助手、写过几本数学名著的著名匈牙利裔犹太人美国数学家哈尔莫斯 (Paul R. Halmos, 1916-2007)，甚至直言不讳地认为：虽然分形很漂亮，但它不是数学。芒德勃罗的后半生大概过得不甚爽快，因为他要抵挡来自四面八方的“明枪暗箭”。刚刚作古的他，其一生功过，还未最后“盖棺论定”，自有后人评说。

看来，还是李天岩和约克的那个经过严格证明的定理“经得起时间的考验”，因而得到有资格的鉴定家戴森的宠爱。无论如何，混沌与分形，好像是科学领域里的一把利剑的双刃，寒光闪闪、所向披靡。它们改变了我们对自然世界的看法，提供了观察物体形态的新方式。混沌是在时间方向上的分形，分形是在空间形式中的混沌。它们把我们从“绝对、静止的决定论”思维桎梏中彻底解放出来，让我们以整体的眼光观测细微之处，从“确定性系统”中找到“内在随机性”，在不规则的“无序”之中理出“有序”规律，“于无声处听惊雷”。它们促使我们再次深深地回味几乎一百年前爱因斯坦在苦苦思索和质疑新生的量子力学时所表达的那句已经载入科学史册的深深疑问：“上帝是在掷骰子吗？”

混沌和分形不光已成为数学领域两大相辅相成的研究分支，更以遍地开花的应用在几乎所有科学技术界的地盘中大显身手。遥望大地，全世界各国对这两门学问的理论研究和应用探索，方兴未艾。作为最新的例子，无线通讯、药物设计这两个与我们的日常生活最有关系的行业已把“混沌”当作一位富有的老太爷来服侍。但是放眼未来，我们不愿预测“混沌学与分形几何学”的走向，因为按照“混沌”的观点，未来是不可预测的！

致谢：作者感谢美国密西根州立大学数学系李天岩教授和香港城市大学电子工程系陈关荣教授在他写作过程中提供的帮助。

参考文献

1. “关于‘Li-Yorke 混沌’的故事”，李天岩，《数学传播》十二卷三期，13-16，1988。

2. 《混沌--开创新科学》，詹姆斯 · 格莱克著，张淑誉译，上海译文出版社，1990。

3. A First Course in Chaotic Dynamical Systems, Robert L. Devaney, Addison-Wesley, 1992.

4. 《分形的哲学漫步》，林夏水等著，首都师范大学出版社，1999。

5. 《勇闯人生的数学大师斯提芬 · 斯梅尔》，Steve Batterson 著，邝重平译，世界科技出版公司，2002。

6. 《数学大师—从芝诺到庞加莱》，E. T. 贝尔著，徐源译，上海科技教育出版社，2004。

7. 《天才的拓荒者--冯 · 诺依曼传》，诺曼 · 麦克雷著，范秀华、朱朝晖译，上海科技教育出版社，2008。

8. “Birds and Frogs”, Freeman Dyson, Notices of the American Mathematical Society，Vol. 56, No. 2, 212-223, 2009。

2011-3-8 初稿

2011-5-20 修改完毕

作者简介：丁玖，南京大学数学系七七级计算数学本科生、八一级硕士研究生。1990 年获美国密西根州立大学应用数学博士学位，导师李天岩教授。现为美国南密西西比大学数学系教授。