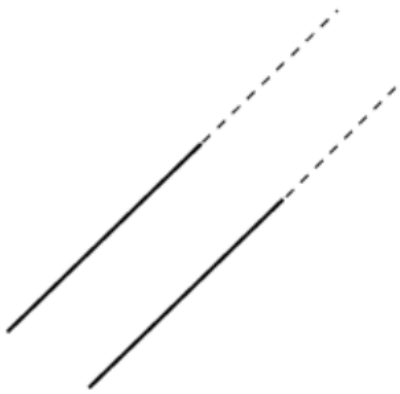
无穷远点很特殊吗？

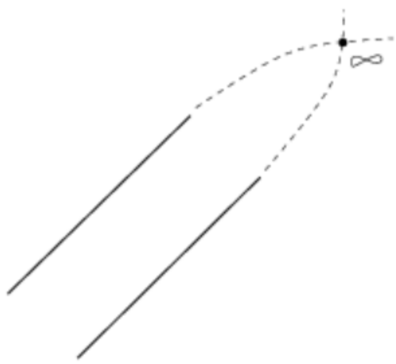
华山派小 6

1.引子

在平面几何中，我们认为“平行直线不会相交”。这个观点在射影几何中得到了修正：“平行直线相交于无穷远点”。无穷远点并不在我们通常理解的平面之内，而是在平面之外的“无穷远处”。为了方便说明，这种点通常用∞来标记。因此在不同的几何学范畴内，上面的两种结论并没有矛盾。



平行直线在平面内不相交



平行直线相交于平面外的无穷远处

对一般人来说，无穷远点的概念并不像普通的点那样容易接受。通常，我们只是直观上想象这样的点处在极为遥远的“天涯尽头”。 正因为这种无穷远点给人某种模模糊糊、虚无飘渺的不确定感，所以人们很容易产生疑惑：这样的点是否真实存在？答案是肯定的。事实上，现代数学可以用几种不同的定义方式来理解无穷远点。这些定义都是彼此等价的。不过它们的严格叙述都充满了技术味道，对初学者来说是相当枯燥的。我们并不打算详细介绍这些技术性的数学定义。

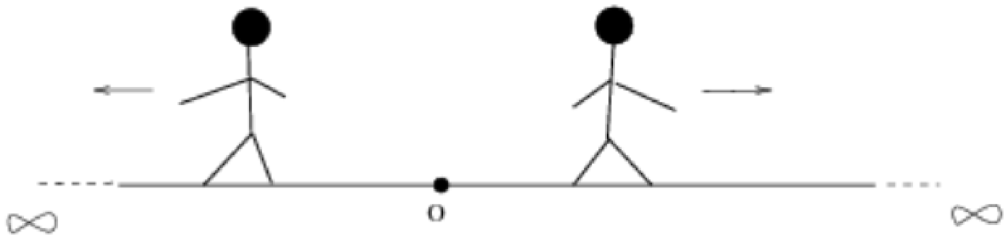
我们将通过一些直观的例子来帮助读者理解无穷远点，并且希望能解释这样一个事实：

无穷远点和普通的点的唯一区别仅仅是它所处的位置。

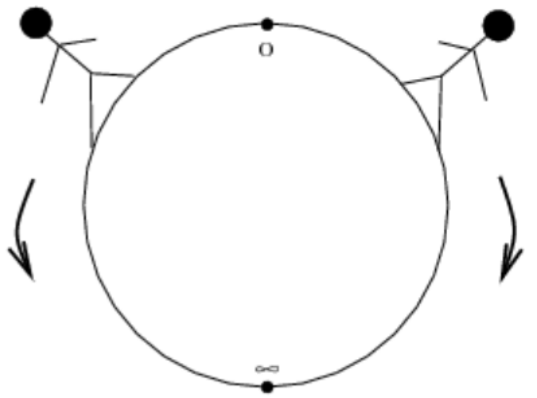
这就好比，球面上南极点（北极点）其实和球面上其他的点并不存在差别。其实你可以任意指定某个点是极点。当你把无穷远点当作普通的点看待后，很多问题都会变得清晰明朗起来。

2. 一个简单的例子：直线和无穷远点

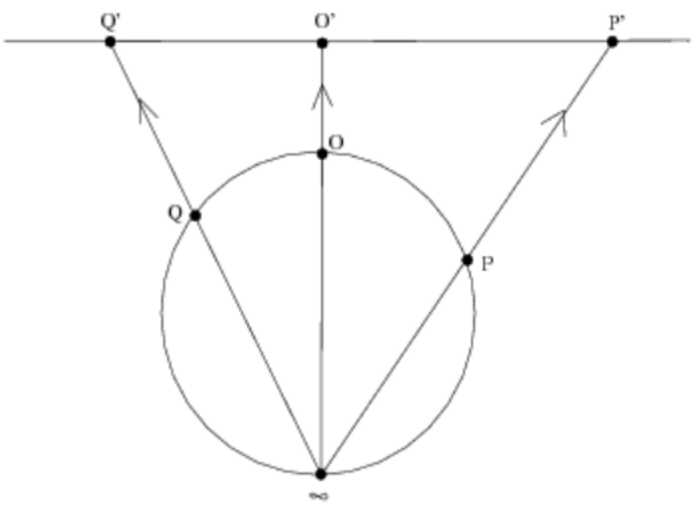
我们首先考察最简单的情形：直线上的无穷远点。想象一下，有两个人背对背，从原点出发分别沿着直线的两个方向行走，他们最终会相遇吗？直观上说，我们认为他们不会相遇，相反是越离越远。这正好对应了成语“背道而驰”和“南辕北辙”的意思。



但是如果我们把无穷远点也添加到直线里，情况就会变得不同：这两个人最终会在无穷远处再次相聚。为了理解这一点，我们可以想象一下：把直线左右两端的无穷远处黏合起来，这样直线就变成了圆圈。在圆圈上，两人从一开始的原点出发朝着不同方向走，很显然会在圆圈上另一个点处再次碰头。我们可以把这一点记作 ∞ 。这一直观的事实也可以用成语“殊途同归”来描述。



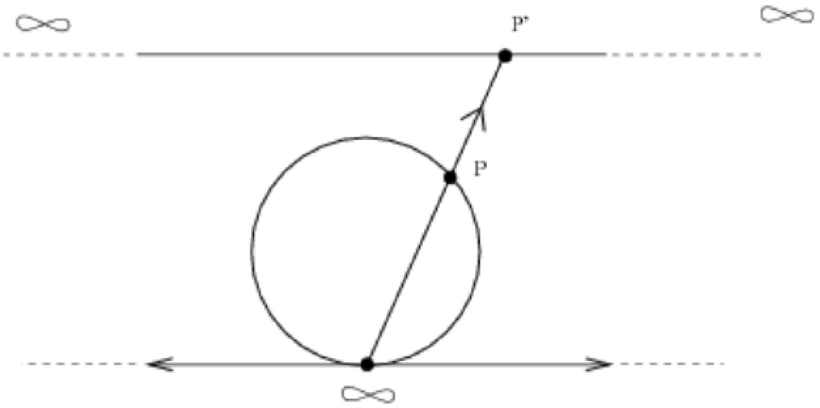
为什么直线添上无穷远点后恰好就是圆圈？尽管直观上想像这件事并不困难，但要严格地说明它，则需要一些数学上的技术手段。让我们在圆圈上的 ∞ 处放上一个电灯泡，灯泡的光线会投射到上方的直线上。



很显然，圆圈上除了 ∞ 外，每个点 P 在直线上都有唯一的投影点 P'； 反过来，直线上任何

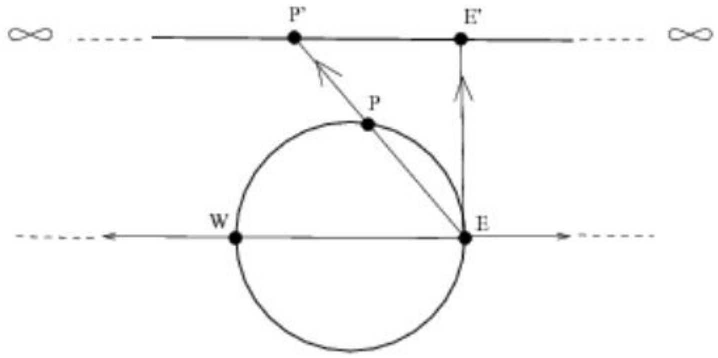
一个点P'，都有唯一的一条光线经过它，这条光线也穿过圆圈上唯一的点P。这就是说，直线上的点和圆圈上的点（∞除外）之间可以通过光线投影的方式一一对应起来。

但是有一条光线很特殊，那就是和直线平行的光线。这条特殊光线和直线没有交点。一个自然的想法是：我们再把直线外的无穷远点和圆圈上的点∞通过这条特殊光线对应起来。换句话说，我们认为这条特殊光线其实是投影到了直线外的无穷远点处。通过这样的方式，整个圆圈就能看作添加了无穷远点的直线。



我们把这种通过光线投影来建立对应的方法称作“球极投影”；把添加了无穷远点进去的直线称作“射影直线”。 上面的讨论换成这些花俏的名词，就是说：射影直线和圆圈在球极投影下可看成相同的事物。

无穷远点∞在射影直线上看，位置似乎很特殊，甚至有点难以想象清楚。但是当你把射影直线当做圆圈看时，会立刻发现，∞其实和圆圈上其他点没啥不同。既然如此，我们是否可以用圆圈上其他点替换∞呢？ 答案是肯定的。比如我们把电灯泡放在圆圈最东侧的点E上：



此时的投影和之前的有点差别。首先，点E此时也可以投影到直线上的普通点E'（通过它的光线恰好和圆圈相切于E）。其次，E的对径点W无法投影到直线上的普通点。这是因为经过它的光线$\overline{EW}$与直线平行，所以光线的投影点实际上是在直线外的无穷远处。除W外，圆圈上每个点都可直线上的点一一对应；而W则对应直线的无穷远点。

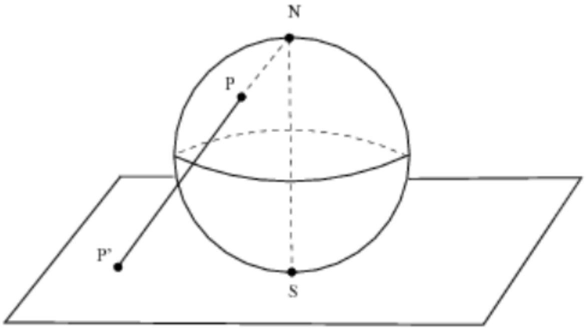
上述例子告诉我们，每个点都可以在你的事先指定下成为射影直线上无穷远点（如果你把射影直线看成圆圈的话）。因此它不具有特殊性。这有点类似于俗语“众生平等”的意思。

3. 举一反三：平面和无穷远点

上面的例子很富有启发性。你也可以尝试在平面外添入无穷远点。 我们有两种不同的

添入无穷远点的方式，通过它们得到的扩充平面却是两类非常不同的几何物体。

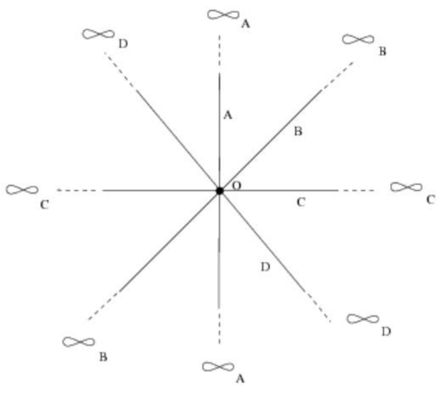
第一类方式就是类比直线情形：把直线替换成平面，圆圈替换成球面。我们把灯泡放在球的北极点 N，然后做光线投影。



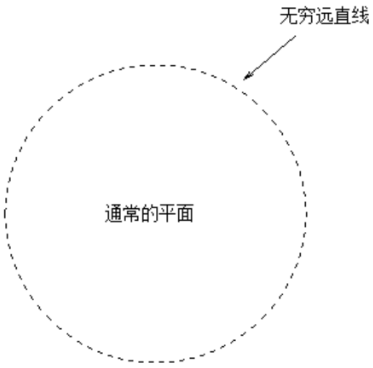
和直线情形类似，球面上除了 N 外每个点都唯一对应了平面上的一个点，反之亦然。然后我们把 N 对应平面外的一个无穷远点 ∞。用这种球极投影的方式，我们得到一个扩充的平面，它是由原始的平面添上一个无穷远点得到的。

另一方面，平面上的点又可以看成一个复数, 反之亦然， 因此有时我们也把平面看成复数全体构成的集合, 也叫做复平面。这样，上面的扩充平面也相当于复数集合添上了一个无穷远点 ∞。如果你把复数想象成类似实数那样可以排成一条直线—形象上叫做“复直线”，那么它添上 ∞ 后就像是一条扩充的直线，我们通常把它形象上叫做“复射影直线”。上面的讨论相当于告诉你，复射影直线可以看成球面。因此也同样可以看到这样的无穷远点其实和其他点完全一样，他们的差别仅在于位置的不同。你同样可以事先指定其他点作为无穷远点。

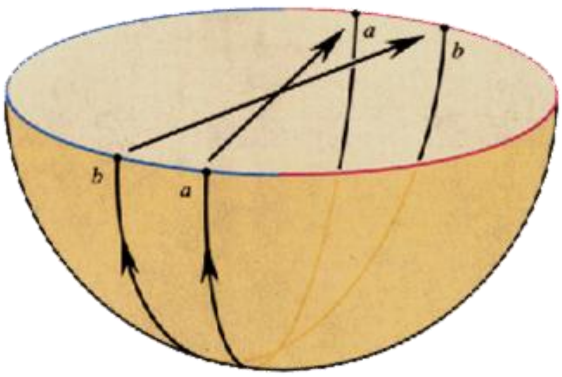
第二种添加无穷远点的方式如下： 我们考虑经过原点的所有直线，每条直线外都对应了一个无穷远点（上一节讨论过了）。这些无穷远点两两不同—因而我们得到无数多个无穷远点—它们全部添入平面后，即得到扩充的平面。 我们通常将它称做射影平面。



所有这些无穷远点其实构成了一个大圆圈—有时我们把它叫做无穷远直线(因为它也可以利用上一节的方法看作一条射影直线)。如果你想象一下的话：这个大圆圈看上去就像是普通平面外面扎的大篱笆。

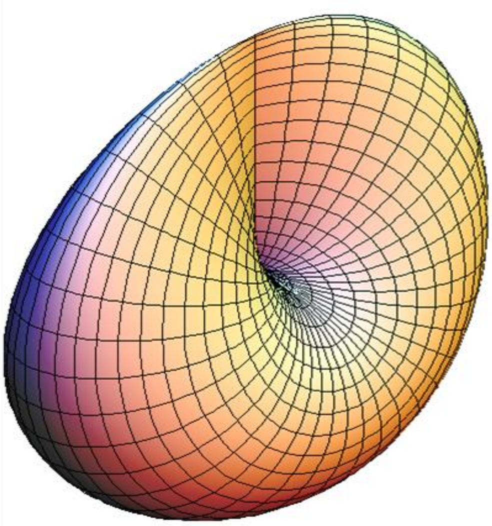


当然，这种想象是不严格的，但是它可以帮助我们体会射影平面的概念。 数学上有很多不同的办法可以等价地描绘射影平面。比如一种办法是将下面的半球的截口上每一对对径点粘合起来—这在现实中是做不到的。



不管你采用何种方式，你都会发现仍然很难清楚准确地将射影平面构造出来。这是为什么呢？本质的原因在于，射影平面根本不是三维空间中的几何物体！也就是说它不能通过三维空间的图像完整无误地显示出来。我们只有将它放在高维空间中，才能准确无误地搞清楚其结构。这就需要一些数学上的手段了。

尽管这多少有点让人失望，但我们可以通过投影的手段，把它压缩投影到三维空间中来看。 这有点类似于拍照片，把三维的物体压缩到二维平面上看，虽然这么做会损失到一部分信息。射影平面在三维中的一种投影图像如下：



你可能同样会问：无穷远直线（也就是所有无穷远点的集合）是否很特殊呢？答案同样

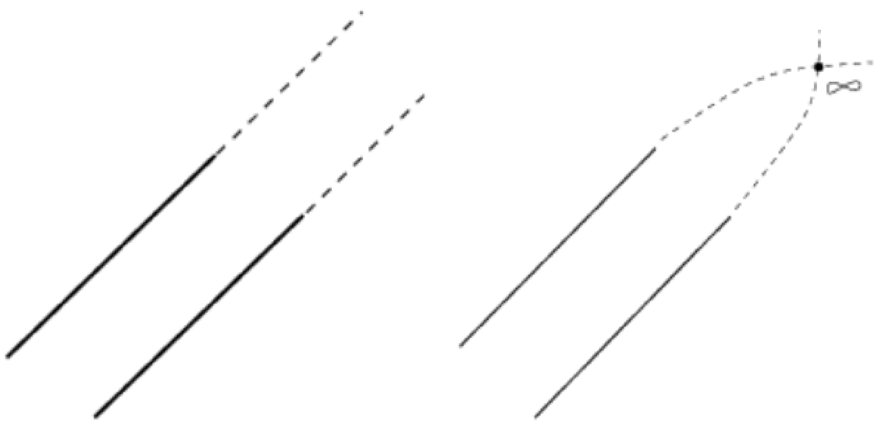
是否定的。其实在射影平面中，任何一条射影直线都能被事先指定为无穷远直线。 这样一来，平面外的无穷远点其实和普通点仍然没有什么特殊差别，仅仅是位置不同而已！当然，要严格说清楚这些事并不是那么轻而易举。我们仍然需要借助数学手段才能做到。

4.为什么我们需要无穷远点？

接下来的问题是：为什么我们要引入无穷远点呢？ 实际上，我们传统意义上研究的直线、平面等等几何空间都是不完整的，添入无穷远点后，这些空间才变得完整无缺。无穷远点本来就是空间的一部分，它和其他点除了位置不同外，没有什么不同。因此，如果我们人为地不接受甚或遗弃它们，显然是不理智的。这样做甚至会给讨论带来很多人为的障碍--只要想想复数的发展历史你就明白了。

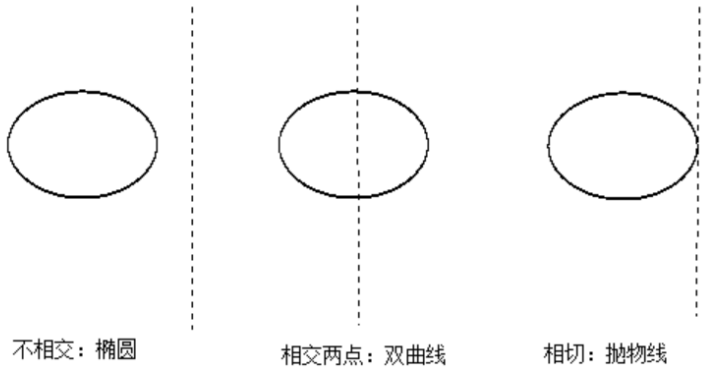
此外，有很多几何现象，在这些通常的空间中看似乎很不一样，甚或没有什么联系， 但是当你把它们放在更大的背景舞台--射影空间--中看，就会发现，这些现象其实只不过是同一事物在不同位置上的表现而已。

举个最简单的例子：在平面几何中，我们讨论两条直线相交情况，需要人为地区分为“相交”和“平行”。但是如果我们在射影平面中讨论这个问题，事情就很简单，我们会发现任何两条直线都恰好交一个点。这个交点是不是无穷远点根本不重要，因为无穷远点和其他点在射影平面中没什么差别。我们通常所认为的差别实际上是人为造成的不必要的思维枷锁。



最后，我们再举一个例子来说明：引入无穷远点为什么是有用的。在平面几何中，我们研究椭圆、双曲线和抛物线。通常的观点会认为这三者是很不一样的---在中学里我们也是分别来讨论它们的。

但是在射影平面中，你会惊讶地发现， 这三者其实是同一样东西！ 它们之所以在坐标平面中显得不一样，只是因为它们和无穷远直线相处的位置不同（回顾上一节讨论，无穷远直线就是平面外全体无穷远点构成的“篱笆”）。这可以从下面的示意图看出来：



这个例子再一次印证了成语“盲人摸象”的道理。我们之所以看到三种不同的二次曲线图像，仅仅是因为我们只看到了完整图像的一部分！

5. 结束语

这篇科普小品文曾作为我的“代数几何科普”系列文章贴在善科问答贴吧中，故当算作旧文。此次重新修改了部分段落，比如增加了射影平面直观构造等等。

科普当代数学的内容其实是件非常困难的工作。因为数学的发展是建立在一系列概念和结论之上的，中间环环相扣，介绍起来往往是“牵一发而动全身”，为了讲清楚一个概念或结论则常常要被迫引入更多概念与结论等。我们常见的数学科普作品，所介绍的内容通常都是比较早期的经典数学。近代的数学思想和内容一般都很难向读者讲清楚。 当然也不乏一些国外优秀的数学科普著作会介绍较前沿的数学，但相对来说这样的作品还是很少的。